

Anbefalte oppgaver uke 46

Høsten 2020

Oppvarming

- 1 Finn konvergensradius, konvergenssentrum og konvergensintervall for rekken under.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^n$$

Oppgaver til plenumsregning

- 1 Avgjør for hvilke x potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} x^{2n}$$

konvergerer, og finn et endelig uttrykk for summen til rekken.

- 2 Finn taylorrekken til

$$f(x) = \ln(1 + 2x)$$

om 0. Hva er konvergensradien?

- 3 La

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{når } x > 0 \\ 0 & \text{når } x \leq 0. \end{cases}$$

- a) Vis at

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}} p(x)}{x^{2n}} \quad \text{når } x > 0,$$

hvor $p(x)$ er et polynom av grad ekte mindre enn $2n$. Bruk dette til å vise

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

(Hint: Dere kan fritt bruke at $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^m} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^m}{e^y} = 0$ når $y = \frac{1}{x}$.)

- b) Finn maclaurinrekken til funksjonen $f(x)$. Vil maclaurinrekken konvergere mot $f(x)$ for $x > 0$?

- 4 Uttrykk

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2} dx$$

som en taylorrekke om 0. Hvor mange ledd må du ta med for å approksimere integralet med en feil på under 10^{-2} ?

Oppgaver med løsningsforslag

1 Finn konvergensradius, -intervall og -sentrum for $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}$.

2 Hva konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ til?

I oppgavene 3 og 4, finn taylorrekken til den gitte funksjonen om $x = 0$.

3 $\cos^2(x/2)$

4 $\int_0^x \cos(t^2) dt$

5 Finn en tilnærming til

$$\int_0^{1/2} \cos(t^2) dt$$

med tre korrekte desimaler.

6 Regn ut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x^2 - \ln(1 + x^2)}$.

7 Avgjør om

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1 + 2^n)(1 + n\sqrt{n})}$$

konvergerer.

8 For hvilke x konvergerer rekken nedenfor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 - 2x)^n}{n}$$

9 Hva konvergerer rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-4}}{(2n-1)!}$$

til?