

## Anbefalte oppgaver uke 42

Høsten 2020

## Oppgaver til plenumsregning

- 1 a) Vis at ligningen

$$x = \cos x$$

har nøyaktig én løsning, og finn denne med fem sikre sifre ved bruk av Newtons metode.

- b) Finn (tilnærmet) de punktene på kurven

$$y^2 + 2 \sin(x) = 2$$

som ligger nærmest origo.

- 2 En følge er definert rekursivt på følgende måte:

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Finn en funksjon  $f$  slik at følgen  $\{x_n\}$  fremkommer ved bruk av Newtons metode for løsning av  $f(x) = 0$ . Vis deretter at følgen  $\{x_n\}$  konvergerer. Hvilket tall konvergerer følgen mot?

- 3 a) La  $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ . Finn største og minste verdi av

$$f''(x) = \frac{2x^2(x^4 + 3)}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

på intervallet  $[0, 2]$ .

- b) Bruk trapesmetoden med fire delintervaller til å finne en tilnærmet verdi for integralet

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx.$$

Gjør et overslag over feilen ved å benytte resultatet fra a).

Forklar hvorfor trapesmetoden gir en for stor verdi for integralet over, uansett antall delintervaller.

- 4 Bruk Simpsons metode til å estimere verdien av integralet

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

med en feilmargin som er mindre enn  $10^{-3}$ .

**Oppgaver med løsningsforslag**

- 1 Finn en tilnærming til  $\sqrt{3}$  ved hjelp av Newtons metode.
- 2 Løs  $\cos x = x^2$ . Hvor mange løsninger finnes det?
- 3 Finn maksimum og minimum til  $g(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ .
- 4 Bruk Simpsons metode med fire delintervall til å finne tilnærminga  $S_4$  til buelengda til grafen til  $y = \sin x^2$  fra  $x = 0$  til  $x = 1$ .  
(H16)

- 5 Finn den faktiske feilen i approksimasjonen

$$\int_0^1 x^2 dx \approx T_1$$

og bruk dette til å vise at konstanten 12 i estimatet for Teorem 4, s. 376, ikke kan forbedres.

- 6 Finn den faktiske feilen i approksimasjonen

$$\int_0^1 x^4 dx \approx S_2$$

og bruk dette til å vise at konstanten 180 i estimatet for Teorem 5, s. 381, ikke kan forbedres.

- 7 Vis at

$$\int_0^1 x^3 dx = S_2.$$