Planen for i dag

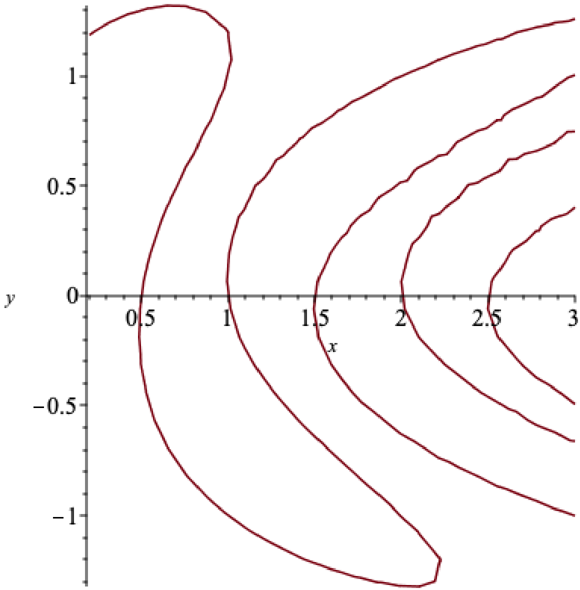
- **Oppgave 1:** Implisitt derivasjon og tangentlinje
- **Oppgave 2:** Koblede hastigheter (related rates)
- **Oppgave 3:** Grenseverdier
- **Oppgave 4:** Ekstremalverdier
- **Oppgave 5:** Konkavitet/konveksitet

Oppgave 1

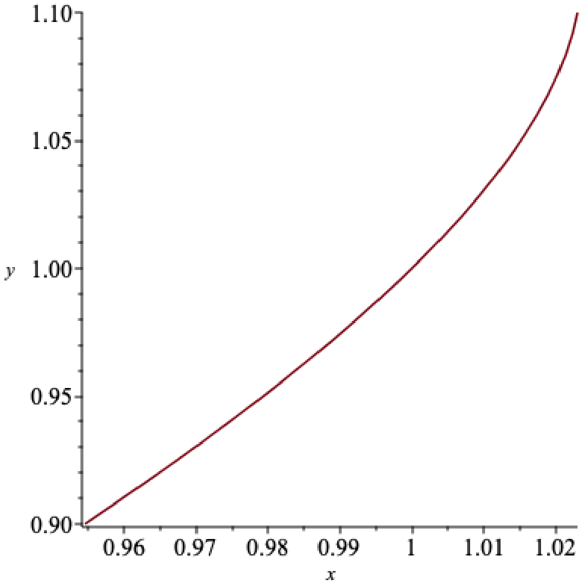
Ligningen

$$y(1-y^2)+\sin\left(\frac{2\pi x}{1+y^2}\right)=0$$

beskriver en kurve i planet. Vis at kurven går gjennom punktet $(1,1)$, og finn ligningen for tangentlinjen til kurven i dette punktet.



NTNU
Norwegian University of
Science and Technology



NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

Oppgave 2

En 5 meter lang stige står opptil en vegg på et flatt underlag. På et gitt tidspunkt er toppen av stigen 4 meter over bakken, og foten av stigen glir bort fra veggen med en fart på 0.1 meter i sekundet. Hvor fort beveger toppen av stigen seg på det gitte tidspunktet?

Oppgave 3

Finn grenseverdiene:

$$(i) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x\cot x} \qquad\qquad (ii) \quad \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)-\tan(t)}{t^2}.$$

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

Oppgave 3

Finn grenseverdiene:

$$(i) \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x \cot x} \qquad\qquad (ii) \quad \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t) - \tan(t)}{t^2}.$$

Husk:

$$\cot = \frac{\cos}{\sin} = \frac{1}{\tan}.$$

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

Oppgave 4

Bestem hvorvidt funksjonen $f(x) = \frac{1}{x-1}$ har globale eller lokale ekstremalverdier på intervallet $(0, 1)$ og angi disse.

Oppgave 4

Bestem hvorvidt funksjonen $f(x) = \frac{1}{x-1}$ har globale eller lokale ekstremalverdier på intervallet $(0, 1)$ og angi disse.

Teorem 1

Hvis f er kontinuerlig på et åpent intervall (a, b) og

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L, \quad og \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = M,$$

da holder følgende:

— *Hvis det finnes $u \in (a, b)$ slik at $f(u) > L$ og $f(u) > M$, da har f et globalt maksimum på (a, b).*

— *Hvis det finnes $u \in (a, b)$ slik at $f(u) < L$ og $f(u) < M$, da har f et globalt minimum på (a, b).*

Oppgave 5

La $f\colon [-1,\infty) \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = \sqrt{1 + x^3}.$$

Bestem hvor f er konveks og konkav og finn vendepunktene.

Definisjon 2

En funksjon f er

- **konveks** *på et interval I, hvis for ethvert valg av $a, b \in I$, ligger linjestykket mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ over grafen til $y = f(x)$.*
- **konkav** *på et interval I, hvis for ethvert valg av $a, b \in I$, ligger linjestykket mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ under grafen til $y = f(x)$.*

Definisjon 3

En funksjon f har et **vendepunkt** *i x_0 hvis f er kontinuerlig rundt x_0 og f er konveks på den ene siden av x_0 og konkav på den andre siden.*

Teorem 4

Anta at f er deriverbar på et intervall I. Da er f

- **konveks** *på I hvis f' er strengt voksende på I.*
- **konkav** *på I hvis f' er strengt avtagende på I.*

Teorem 4

Anta at f er deriverbar på et intervall I. Da er f

— **konveks** *på I hvis f' er strengt voksende på I.*

— **konkav** *på I hvis f' er strengt avtagende på I.*

Teorem 5

Anta f er to ganger deriverbar på et intervall I.

— *hvis $f'' > 0$ på I, da er f* **konveks** *på I.*

— *hvis $f'' < 0$ på I, da er f* **konkav** *på I.*

— *hvis f har et vendepunkt i x_0, da er $f''(x_0) = 0$.*

NTNU
Norwegian University of Science and Technology