NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Plenumsregning

Matematikk 1

15.11.19

Oppgave 1

a) Løs initialverdiproblemet

$$y' = 1 - y^2, \qquad y(0) = 0.5$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y' + \cos(x)y = 2xe^{-\sin x}, \qquad y(\pi) = 0.$$

Oppgave 1

a) Løs initialverdiproblemet

$$y' = 1 - y^2, \qquad y(0) = 0.5$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y' + \cos(x)y = 2xe^{-\sin x}, \qquad y(\pi) = 0.$$

Løsning

a)

$$y(x) = \frac{3e^{2x} - 1}{3e^{2x} + 1}$$

b)

$$y(x) = e^{-\sin(x)}\left(x^2 - \pi^2\right)$$

Oppgave 2

Vis at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} x^{2n}$ er en løsning til initialverdiproblemet

$$y'' + xy' + y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Løsning

Rask metode:

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f'(x) = -xe^{-x^2/2}, \quad f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$f'' + xf' + f = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{x}} = 0.$$

Eventuelt: Se filming.

Oppgave 3

Bruk Eulers metode med skrittlengde $\frac{1}{3}$ til å estimere $y(1)$ for initialverdiproblemet

$$y' - 3xy = 1, \qquad y(0) = 0.$$

Eulers metode

Anta $y' = f(x, y)$.
Skrittlengde: h
Startpunkt: x_0 og start y verdi y_0
Iterasjon:

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Løsning

$y(1) \approx 44/27$

Oppgave 4

En melkekartong der temperaturen i melken var 6°C, ble stående på kjøkkenbenken i 2 timer. Da var temperaturen steget til 13°C. Lufttemperaturen i kjøkkenet var 20°C. Vi regner med at Newtons avkjølings-/oppvarmingslov gjelder, det vil si at temperaturendringen per tidsenhet i melken er proporsjonal med differansen mellom lufttemperaturen og temperaturen i melken.

a) Still opp en differensialligning for temperaturen T i melken som funksjon av tiden t, og vis at den har løsning av formen

$$T(t) = A + Be^{-\alpha t}$$

der A er lufttemperaturen. Finn konstantene B og α.

Oppgave 4

En melkekartong der temperaturen i melken var 6°C, ble stående på kjøkkenbenken i 2 timer. Da var temperaturen steget til 13°C. Lufttemperaturen i kjøkkenet var 20°C. Vi regner med at Newtons avkjølings-/oppvarmingslov gjelder, det vil si at temperaturendringen per tidsenhet i melken er proporsjonal med differansen mellom lufttemperaturen og temperaturen i melken.

a) Still opp en differensialligning for temperaturen T i melken som funksjon av tiden t, og vis at den har løsning av formen

$$T(t) = A + Be^{-\alpha t}$$

der A er lufttemperaturen. Finn konstantene B og α.

b) Da temperaturen i melken var 15°C, ble kartongen satt inn i kjøleskapet. Etter 1 time var temperaturen i melken sunket til 12°C. Hva var temperaturen i kjøleskapet?

Oppgave 4, Løsning

a)

$$T'(t) = C\left(T(t) - D\right)$$

$$T(t) = 20 - 14e^{-\ln\left(\sqrt{2}\right)t} = 20 - \frac{14}{\sqrt{2}^t}$$

b) NB! $\alpha = -C$ er den samme i oppgave a), siden α er kun avhengig av hvordan varme unnslipper melkekartongen som er den samme i begge eksemplene.
$A = 9 - 3\sqrt{2}$