NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Plenumsregning

Matematikk 1

08.11.19

Oppgave 1

Avgjør for hvilke x potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} x^{2n}$$

konvergerer, og finn et endelig uttrykk for summen til rekken.

Oppgave 1

Avgjør for hvilke x potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} x^{2n}$$

konvergerer, og finn et endelig uttrykk for summen til rekken.

Konvergens

Konvergensradiusen R er gitt ved

$$1/R = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Oppgave 1

Avgjør for hvilke x potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} x^{2n}$$

konvergerer, og finn et endelig uttrykk for summen til rekken.

Konvergens

Konvergensradiusen R er gitt ved

$$1/R = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Fasit: $e^{-x^2} - 1$, rekken konvergerer for alle x.

Oppgave 2

Finn taylorrekken til

$$f(x) = \ln(1 + 2x)$$

om 0. Hva er konvergensradien?

Oppgave 2

Finn taylorrekken til

$$f(x) = \ln(1 + 2x)$$

om 0. Hva er konvergensradien?

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} y^n, \quad -1 < y \leq 1$$

Oppgave 2

Finn taylorrekken til

$$f(x) = \ln(1 + 2x)$$

om 0. Hva er konvergensradien?

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} y^n, \quad -1 < y \leq 1$$

Fasit: $\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n} x^n$, konvergensradien er $1/2$.

Oppgave 3

La

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{når } x > 0 \\ 0 & \text{når } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Vis at

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}} p(x)}{x^{2n}} \quad \text{når } x > 0,$$

hvor $p(x)$ er et polynom av grad ekte mindre enn $2n$. Bruk dette til å vise

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Hint: Dere kan fritt bruke at $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^m} = \lim_{y \to \infty} \frac{y^m}{e^y} = 0$ *når* $y = \frac{1}{x}$.

Oppgave 3

La

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{når } x > 0 \\ 0 & \text{når } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Vis at

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}} p(x)}{x^{2n}} \quad \text{når } x > 0,$$

hvor $p(x)$ er et polynom av grad ekte mindre enn $2n$. Bruk dette til å vise

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Hint: Dere kan fritt bruke at $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^m} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^m}{e^y} = 0$ *når* $y = \frac{1}{x}$.

b) Finn maclaurinrekken til funksjonen $f(x)$. Vil maclaurinrekken konvergere mot $f(x)$ for $x > 0$?

Oppgave 3

La

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{når } x > 0 \\ 0 & \text{når } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Vis at

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}} p(x)}{x^{2n}} \quad \text{når } x > 0,$$

hvor $p(x)$ er et polynom av grad ekte mindre enn $2n$. Bruk dette til å vise

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Hint: Dere kan fritt bruke at $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^m} = \lim_{y \to \infty} \frac{y^m}{e^y} = 0$ *når* $y = \frac{1}{x}$.

b) Finn maclaurinrekken til funksjonen $f(x)$. Vil maclaurinrekken konvergere mot $f(x)$ for $x > 0$?

Fasit: maclaurinrekken er $\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0$, og konvergerer dermed ikke mot $f(x)$ når $x > 0$.

Oppgave 4

Uttrykk

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2}\, dx$$

som en taylorrekke om 0. Hvor mange ledd må du ta med for å approkismere integralet med en feil på under 10^{-2}?

Oppgave 4

Uttrykk

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2}\,dx$$

som en taylorrekke om 0. Hvor mange ledd må du ta med for å approkismere integralet med en feil på under 10^{-2}?

Oppgave 4

Uttrykk

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2}\, dx$$

som en taylorrekke om 0. Hvor mange ledd må du ta med for å approkismere integralet med en feil på under 10^{-2}? Fasit:

$\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x^2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!(2n+1)}$. 3 ledd.