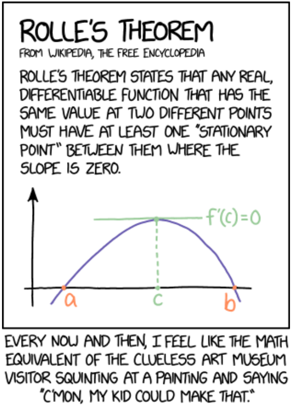
NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Plenumsregning

Matematikk 1

01.11.19



Oppgave 1

Avgjør om de positive rekkene under konvergerer eller divergerer.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$ **Konvergerer.**

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$ **Divergerer.**

Oppgave 1

Avgjør om de positive rekkene under konvergerer eller divergerer.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$ **Konvergerer.**

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$ **Divergerer.**

Forholdstesten

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, og $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = L$. Da har vi at om

- $0 \leq L < 1$ vil rekken konvergere.
- $L = 1$ vet vi ikke om rekken vil konvergere.
- $L > 1$ vil rekken divergere.

Oppgave 1

Avgjør om de positive rekkene under konvergerer eller divergerer.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$ **Konvergerer.**

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$ **Divergerer.**

Forholdstesten

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, og $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = L$. Da har vi at om

— $0 \leq L < 1$ vil rekken konvergere.

— $L = 1$ vet vi ikke om rekken vil konvergere.

— $L > 1$ vil rekken divergere.

Konvergens

Dersom $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ vil ikke rekken konvergere.

Oppgave 2

a) Vis at rekka $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)$ konvergerer. Konvergerer rekka absolutt eller betinget? **Rekken konvergerer betinget.**

b) La S betegne summen av rekka i **a)**. Partialsummen

$$S_9 = \sum_{n=2}^{9}(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)$$

er en tilnærming til S. Hva kan du si om $S - S_9$ (feilen til tilnærmingen)? **Feilen er mindre enn 0.09.**

Oppgave 2

a) Vis at rekka $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)$ konvergerer. Konvergerer rekka absolutt eller betinget? **Rekken konvergerer betinget.**

b) La S betegne summen av rekka i **a)**. Partialsummen

$$S_9 = \sum_{n=2}^{9}(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)$$

er en tilnærming til S. Hva kan du si om $S - S_9$ (feilen til tilnærmingen)? **Feilen er mindre enn 0.09.**

Definisjoner

En rekke er *absolutt konvergent* dersom $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ er konvergent. En rekke er *betinget konvergent* dersom $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergerer, men ikke $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Oppgave 3

Avgjør om påstandene under er sanne eller gale. Begrunn svaret med et bevis eller et moteksempel.

a) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.
Feil.

b) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergerer, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutt.
Feil.

c) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ absolutt.
Sant.

Oppgave 4a

Vis ved induksjon at for $n = 1, 2, 3, \ldots$ gjelder

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

Bevis ved induksjon

1. La $n = 1$. Da har vi at $\sum_{i=2}^{2} \frac{1}{i} = \frac{1}{2} = \sum_{m=1}^{2} \frac{(-1)^{m+1}}{m} = 1 - \frac{1}{2}$.
2. Anta at

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

Vi vil vise at

$$\sum_{i=n+2}^{2n+2} \frac{1}{i} = \sum_{m=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

(Se neste side)

Oppgave 4a

Fortsettelse

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{m+1}}{m} &= \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{i=n+2}^{2n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{i=n+2}^{2n} \frac{1}{i} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \\
&= \sum_{i=n+2}^{2n+2} \frac{1}{i}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 4b

Bruk **a)** til å vise at $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \cdots = \ln 2$.

Bevis

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$$

Set $j = i - (n+1)$. Da har vi at

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{n}{j+n+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{(j+1)/n+1}.$$

Oppgave 4b

Fortsettelse

Vi ønsker å tenke på summen som en Riemannsum. Ved å gjøre en partisjon av intervallet $[0, 1]$. Da kan vi sette $\Delta x_j = \frac{1}{n}$ og $x_j = \frac{j+1}{n}$. Da har vi at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{(j+1)/n+1} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta x_j \frac{1}{x_j+1} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \\
&= [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2)
\end{aligned}$$