NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Plenumsregning

Matematikk 1

25.10.19

"Divergente Rækker er i det Hele noget Fandenskap, og det er en Skam at man vover at grunde nogen Demonstrasjon derpaa. Man kan faae frem hvad man vil naar man bruger dem, og det er dem som har gjort saa megen Ulykke og saa mange Paradoxer. Kan det tænkes noget skrekkeligere end at sige at

$$0 = 1^n - 2^n + 3^n - 4^n + \text{etc.}$$

hvor n er et heelt Tal."

-Nils Henrik Abel (Brev til Holmboe 1826)

Oppgave 1a

Avgjør hvorvidt følgene under er begrensede, monotone, og konvergente (og mot hva):

$$\left\{ \frac{n^2 - 1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} .$$

Oppgave 1a

Avgjør hvorvidt følgene under er begrensede, monotone, og konvergente (og mot hva):

$$\left\{ \frac{n^2 - 1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Definisjoner

En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er *begrenset* hvis det eksisterer et tall M slik at $|a_n| \leq M$ for alle n.

Oppgave 1a

Avgjør hvorvidt følgene under er begrensede, monotone, og konvergente (og mot hva):

$$\left\{ \frac{n^2 - 1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} .$$

Definisjoner

En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er *begrenset* hvis det eksisterer et tall M slik at $|a_n| \leq M$ for alle n.

En følge er *monotont stigende (synkende)* om $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_{n+1} \leq a_n$).

Oppgave 1a

Avgjør hvorvidt følgene under er begrensede, monotone, og konvergente (og mot hva):

$$\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Definisjoner

En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er *begrenset* hvis det eksisterer et tall M slik at $|a_n| \leq M$ for alle n.

En følge er *monotont stigende (synkende)* om $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_{n+1} \leq a_n$).

En følge *konvergerer* mot L hvis for alle ε eksisterer en N slik at $|a_n - L| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$.

Oppgave 1a

Avgjør hvorvidt følgene under er begrensede, monotone, og konvergente (og mot hva):

$$\left\{ \frac{n^2 - 1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} .$$

Definisjoner

En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er *begrenset* hvis det eksisterer et tall M slik at $|a_n| \leq M$ for alle n.

En følge er *monotont stigende (synkende)* om $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_{n+1} \leq a_n$).

En følge *konvergerer* mot L hvis for alle ε eksisterer en N slik at $|a_n - L| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$.

— En ubegrenset følge kan aldri konvergere.

Oppgave 1b

Avgjør hvorvidt følgene under er begrensede, monotone, og konvergente (og mot hva):

$$\left\{ \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{(husk at } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n\text{).}$$

Oppgave 1b

Avgjør hvorvidt følgene under er begrensede, monotone, og konvergente (og mot hva):

$$\left\{ \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{(husk at } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n\text{).}$$

Teorem

En følge som er begrenset og monoton vil alltid konvergere.

Oppgave 1b

Avgjør hvorvidt følgene under er begrensede, monotone, og konvergente (og mot hva):

$$\left\{ \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{(husk at } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n\text{).}$$

Teorem

En følge som er begrenset og monoton vil alltid konvergere.

Skviseteoremet for følger

La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ være tre følger slik at $a_n \leq b_n \leq c_n$ og

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

Da er

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Oppgave 1c

Avgjør hvorvidt følgene under er begrensede, monotone, og konvergente (og mot hva):

$$\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Skviseteoremet for følger

La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ være tre følger slik at $a_n \leq b_n \leq c_n$ og

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

Da er

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Oppgave 2

La $a_1 = 3$ og $a_{n+1} = \sqrt{15 + 2a_n}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Vis at $\{a_n\}$ er økende og begrenset ovenifra. Hva er grenseverdien til følgen?

Oppgave 3

Finn summen av rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

(Hint: Delbrøksoppspalt og skriv ut delsummene.)

Oppgave 4

Avgjør om følgende rekker konvergerer eller divergerer. (Hint: Integraltesten.)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

Oppgave 4

Avgjør om følgende rekker konvergerer eller divergerer. (Hint: Integraltesten.)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

Integraltesten

La f være en kontinuerlig, positiv og synkende funksjon. Da er

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \text{ hvis og bare hvis } \int_1^{\infty} f(t)\,dt < \infty.$$