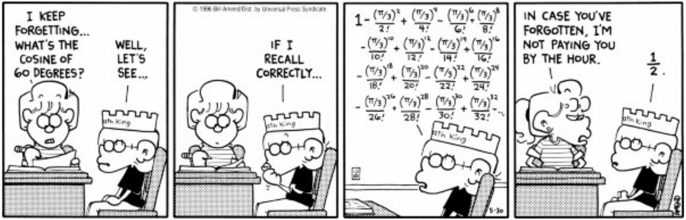
NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Plenumsregning

Matematikk 1

18.10.19



Oppgave 1

Hvis du vet at $f(2) = 4$, $f'(2) = -1$ og $\frac{1}{2x} \leq f''(x) \leq \frac{1}{x}$ for $2 \leq x \leq 3$, hva er den beste tilnærmingen du kan gi til $f(3)$?

Oppgave 1

Hvis du vet at $f(2) = 4$, $f'(2) = -1$ og $\frac{1}{2x} \leq f''(x) \leq \frac{1}{x}$ for $2 \leq x \leq 3$, hva er den beste tilnærmingen du kan gi til $f(3)$?

Taylors Teorem

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) = \frac{f(a)}{0!}(x-a)^0 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + E_n(x)$$

hvor feilleddet er

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

hvor s er mellom a og x.

Oppgave 2

a) En kurve K i xy-planet har ligning

$$2e^{2x} - e^{y} = x^{2}y.$$

Vis at punktet $(0, \ln 2)$ ligger på K og finn ligningen for tangenten til K i dette punktet.

b) Finn taylorpolynomet av grad 2, $P_2(x)$, om $x = 0$ for funksjonen $y = f(x)$ som er definert implisitt ved ligningen over.

Oppgave 3

Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{t^6 + 1} \, dt.$$

a) Bestem $f(0)$, $f'(0)$, og $f''(0)$, og finn taylorpolynomet $P_2(x)$ av grad 2 i $a = 0$ for f.

b) Bruk Taylors teorem med $n = 2$ til å finne en øvre og en nedre skranke for $f(0.4)$ (dvs. finn tall U og L slik at $L \leq f(0.4) \leq U$) når det oppgis at

$$-1 \leq f'''(x) \leq 0 \qquad \text{for } 0 \leq x \leq 0.4.$$

Oppgave 4

La f være en to ganger deriverbar funksjon med $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ og $f''(0) = 1$. Finn taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen $g(x) = f(f(x))$ om punktet $x = 0$.

Oppgave 5

La

$$I = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \sin(t^2)\, dt.$$

a) Finn en tilnærming til I ved å bruke Simpsons metode med 4 delintervaller.
b) Finn en tilnærming til I ved å bruke taylorpolynomet av orden 3 til $f(x) = \sin x$ om $x = 0$.

Simpsons metode

$$S_{2n} = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

Hvis $\left|f^{(4)}\right| \leq K$, da er

$$E_{2n} \leq \frac{K\,(b-a)^5}{180\,(2n)^4}.$$