NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Plenumsregning

Matematikk 1

11.10.19

Oppgave 1

a) Vis at ligningen

$$x = \cos x$$

har nøyaktig én løsning, og finn denne med fem sikre sifre ved bruk av Newtons metode.

Oppgave 1

a) Vis at ligningen

$$x = \cos x$$

har nøyaktig én løsning, og finn denne med fem sikre sifre ved bruk av Newtons metode.

Newtons metode

Velg startpunkt x_0.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Oppgave 1

a) Vis at ligningen

$$x = \cos x$$

har nøyaktig én løsning, og finn denne med fem sikre sifre ved bruk av Newtons metode.

Newtons metode

Velg startpunkt x_0.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Feilestimering

La $|f''(x)| \leq K$ og $|f'(x)| \geq L$. Da er

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{K}{2L} |x_{n+1} - x_n|^2 .$$

Oppgave 1

a) Vis at ligningen

$$x = \cos x$$

har nøyaktig én løsning, og finn denne med fem sikre sifre ved bruk av Newtons metode.

b) Finn (tilnærmet) de punktene på kurven

$$y^2 + 2\sin(x) = 2$$

som ligger nærmest origo.

Oppgave 1

a) Vis at ligningen

$$x = \cos x$$

har nøyaktig én løsning, og finn denne med fem sikre sifre ved bruk av Newtons metode.

b) Finn (tilnærmet) de punktene på kurven

$$y^2 + 2\sin(x) = 2$$

som ligger nærmest origo.

Distansen mellom punkter i planet

$$|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Oppgave 1b)

Utregning

$$y(x) = \pm\sqrt{2 - 2\sin(x)}$$

Distansen mellom origo og punktet $(x, y(x))$ i andre blir

$$D(x) = x^2 + 2 - 2\sin(x).$$

Deriverer vi D får vi

$$D'(x) = 2x - 2\cos(x) = 0 = -2(\cos(x) - x).$$

Dermed er en estimert løsning

$$x = 0.7390851,$$

som gir oss punktet $(x, y(x)) = (0.7390851, 1.405063)$.

Oppgave 2

En følge er definert rekursivt på følgende måte:

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Finn en funksjon f slik at følgen $\{x_n\}$ fremkommer ved bruk av Newtons metode for løsning av $f(x) = 0$. Vis deretter at følgen $\{x_n\}$ konvergerer. Hvilket tall konvergerer følgen mot?

Oppgave 2

En følge er definert rekursivt på følgende måte:

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Finn en funksjon f slik at følgen $\{x_n\}$ fremkommer ved bruk av Newtons metode for løsning av $f(x) = 0$. Vis deretter at følgen $\{x_n\}$ konvergerer. Hvilket tall konvergerer følgen mot?

Feilestimering 2

La $|f''(x)| \leq K$ og $|f'(x)| \geq L$. Da er

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{K}{2L} |x_n - r|^2 .$$

Oppgave 3

a) La $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$. Finn største og minste verdi av

$$f''(x) = \frac{2x^2(x^4 + 3)}{(1 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

på intervallet $[0, 2]$.

b) Bruk trapesmetoden med fire delintervaller til å finne en tilnærmet verdi for integralet

$$\int_0^2 \sqrt{1 + x^4}\, dx.$$

Gjør et overslag over feilen ved å benytte resultatet fra **a)**. Forklar hvorfor trapesmetoden gir en for stor verdi for integralet over, uansett antall delintervaller.

Oppgave 3b

Bruk trapesmetoden med fire delintervaller til å finne en tilnærmet verdi for integralet

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx.$$

Gjør et overslag over feilen ved å benytte resultatet fra **a).**

Forklar hvorfor trapesmetoden gir en for stor verdi for integralet over, uansett antall delintervaller.

Oppgave 3b

Bruk trapesmetoden med fire delintervaller til å finne en tilnærmet verdi for integralet

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\, dx.$$

Gjør et overslag over feilen ved å benytte resultatet fra **a)**.
Forklar hvorfor trapesmetoden gir en for stor verdi for integralet over, uansett antall delintervaller.

Trapesmetoden

$$T_n = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

La f være slik at $|f''| \leq K$, da har vi feilestimatet

$$E_n \leq \frac{K\,(b-a)\,h^2}{12}.$$

Oppgave 4

Bruk Simpsons metode til å estimere verdien av integralet

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

med en feilmargin som er mindre enn 10^{-3}.

Oppgave 4

Bruk Simpsons metode til å estimere verdien av integralet

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

med en feilmargin som er mindre enn 10^{-3}.

Simpsons metode

$$S_{2n} = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

La f være en funksjon slik at $\left|f^{(4)}\right| \leq K$, da er et feilesitmat

$$E_{2n} \leq \frac{K\,(b-a)\,h^4}{180} = \frac{K\,(b-a)^5}{180\,(2n)^4}.$$