NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Plenumsregning

Matematikk 1

20.09.19

Oppgave 1

Finn en funksjon f slik at

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-\frac{k^2}{n^2}}$$

er en Riemannsum for f på intervallet $[0, 1]$. Bruke dette til å bestemme grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-\frac{k^2}{n^2}}.$$

Oppgave 1

Finn en funksjon f slik at

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-\frac{k^2}{n^2}}$$

er en Riemannsum for f på intervallet $[0,1]$. Bruke dette til å bestemme grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-\frac{k^2}{n^2}}.$$

Oppgave 1

Finn en funksjon f slik at

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-\frac{k^2}{n^2}}$$

er en Riemannsum for f på intervallet $[0,1]$.

Definisjon av Riemannsum

La $a = x_0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ være partisjonen P_n av intervallet $[a,b]$ og $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Da er Riemannsummen

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i.$$

Oppgave 1

Bruke dette til å bestemme grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k e^{-\frac{k^2}{n^2}}.$$

Definisjon av Riemannsum

La $a = a_0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ være partisjonen P_n av intervallet $[a, b]$ og $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Da er Riemannsummen

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x_i.$$

Integralet er definert som

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty,\, |P_n|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x_i.$$

Oppgave 2

Finn gjennomsnittsverdien av funksjonen $f(x) = |x+1|\text{sgn}(x)$ på intervallet $[-2, 2]$, der

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Oppgave 2

Finn gjennomsnittsverdien av funksjonen $f(x) = |x+1|\text{sgn}(x)$ på intervallet $[-2, 2]$, der

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Definisjon av Gjennomsnitt

La f være en funksjon, da er gjennomsnittet

$$E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Oppgave 3

La

$$F(t) = \int_0^t \cos(x^2)\,dx,$$

og finn $\frac{d}{dx} F(\sqrt{x})$.

Oppgave 3

La

$$F(t) = \int_0^t \cos(x^2)\, dx,$$

og finn $\frac{d}{dx} F(\sqrt{x})$.

Fundamentalteoremet i Kalkulus

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(x)\, dx = f(t).$$

Oppgave 4

Regn ut integralene

$$i)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\,dx \qquad\qquad ii)\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\,dx.$$

(Hint: $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$.)

Oppgave 5

Finn området avgrenset av den lukkede kurven $y^2 = x^4(2 + x)$ til venstre for y-aksen.

Oppgave 5

Finn området avgrenset av den lukkede kurven $y^2 = x^4(2+x)$ til venstre for y-aksen.