NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Plenumsregning

Matematikk 1

13.09.19

Oppgave 1

La $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = e^{\frac{5}{2}+\cos x}.$$

Forklar hvorfor f er en-til-en og finn verdimengden til f. Regn deretter ut $(f^{-1})'(e^3)$.

Oppgave 1

La $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = e^{\frac{5}{2}+\cos x}.$$

Forklar hvorfor f er en-til-en og finn verdimengden til f. Regn deretter ut $(f^{-1})'(e^3)$.

Teori

— En funksjon er en-til-en (injektiv/en-entydig) hvis $x_1 \neq x_2$ medfører at $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Oppgave 1

La $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = e^{\frac{5}{2}+\cos x}.$$

Forklar hvorfor f er en-til-en og finn verdimengden til f. Regn deretter ut $(f^{-1})'(e^3)$.

Teori

- En funksjon er en-til-en (injektiv/en-entydig) hvis $x_1 \neq x_2$ medfører at $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- En funksjon som er strengt voksende eller avtagende funksjon er injektiv.

Oppgave 1

La $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = e^{\frac{5}{2}+\cos x}.$$

Forklar hvorfor f er en-til-en og finn verdimengden til f. Regn deretter ut $(f^{-1})'(e^3)$.

Teori

- En funksjon er en-til-en (injektiv/en-entydig) hvis $x_1 \neq x_2$ medfører at $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- En funksjon som er strengt voksende eller avtagende funksjon er injektiv.
- En funksjon (definert på et intervall) som har $f' < 0$ er strengt avtagende.

Oppgave 1

La $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = e^{\frac{5}{2}+\cos x}.$$

Forklar hvorfor f er en-til-en og finn verdimengden til f. Regn deretter ut $(f^{-1})'(e^3)$.

Teori

- En funksjon er en-til-en (injektiv/en-entydig) hvis $x_1 \neq x_2$ medfører at $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- En funksjon som er strengt voksende eller avtagende funksjon er injektiv.
- En funksjon (definert på et intervall) som har $f' < 0$ er strengt avtagende.
- $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ og $f^{-1}(f(x)) = x$.

Oppgave 1

Hvorfor kan jeg gå fra strengt synkende på $(0, \pi)$ til strengt synkende på $[0, \pi]$?

Anta av kontradiksjon at $f' < 0$ på $(0, \pi)$ og f ikke er injektiv på $[0, \pi]$.

Oppgave 1

Hvorfor kan jeg gå fra strengt synkende på $(0, \pi)$ til strengt synkende på $[0, \pi]$?

Anta av kontradiksjon at $f' < 0$ på $(0, \pi)$ og f ikke er injektiv på $[0, \pi]$.
Ikke er injektiv $\iff$ det punkter $x_1 < x_2$ slik at $f(x_1) = f(x_2)$.

Oppgave 1

Hvorfor kan jeg gå fra strengt synkende på $(0,\pi)$ til strengt synkende på $[0,\pi]$?

Anta av kontradiksjon at $f' < 0$ på $(0,\pi)$ og f ikke er injektiv på $[0,\pi]$.
Ikke er injektiv $\iff$ det punkter $x_1 < x_2$ slik at $f(x_1) = f(x_2)$.
Av sekantsetningen eksistere ett punkt $c \in (x_1, x_2)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 < 0.$$

Oppgave 1

Hvorfor kan jeg gå fra strengt synkende på $(0, \pi)$ til strengt synkende på $[0, \pi]$?

Anta av kontradiksjon at $f' < 0$ på $(0, \pi)$ og f ikke er injektiv på $[0, \pi]$.
Ikke er injektiv $\iff$ det punkter $x_1 < x_2$ slik at $f(x_1) = f(x_2)$.
Av sekantsetningen eksistere ett punkt $c \in (x_1, x_2)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 < 0.$$

Dette vil si at om en kontinuerlig funksjonen er strengt synkende $(0, \pi)$ må den være strengt synkende på $[0, \pi]$.

Oppgave 2

Evaluer følgende grenseverdier:

$$i)\ \lim_{x\to\infty} \log_x 2 \qquad ii)\ \lim_{x\to 1+} \log_x 2 \qquad iii)\ \lim_{x\to 1-} \log_x 2$$

$$iv)\ \lim_{t\to 0+} \frac{e^{-1/t^2}}{t^2} \qquad (\text{ Hint: substituer } x = 1/t)$$

Logaritmeregler

$$\log_a(c) = \frac{\log_b(c)}{\log_b(a)}$$

Oppgave 3

Anta at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en inverterbar funksjon med invers f^{-1}. La x_0 være et fikspunkt til funksjonen f, det vil si at $f(x_0) = x_0$. Vis at x_0 også er et fikspunkt til funksjonen f^{-1}. Forklar intuitivt hva som skjer i dette punktet ved å bruke grafene til funksjonene.

Oppgave 4

La

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}{(x^2+1)(x^2+2)}.$$

Finn $f'(x)$.
(Hint: Logaritmisk derivert.)

Logaritmisk derivert

Den logaritmisk deriverte av funksjonen f er definert som

$$(\ln(f(x)))' = f'(x)\frac{1}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Oppgave 5

Vis at

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

og bruk dette til å finne den deriverte av $\sinh^{-1}$.

Husk at

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

og

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Hvor kommer $\sinh(x)$ fra?

Kvadratiske former er på formen

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Hvor kommer $\sinh(x)$ **fra?**

Kvadratiske former er på formen

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Det viser seg at alle de interesante kurvene kan reduseres til en av disse mulighetene:

Hvor kommer $\sinh(x)$ fra?

Kvadratiske former er på formen

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Det viser seg at alle de interesante kurvene kan reduseres til en av disse mulighetene:

1. Sirkelen (elliptisk): $x^2 + y^2 = 1$

Hvor kommer $\sinh(x)$ fra?

Kvadratiske former er på formen

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Det viser seg at alle de interesante kurvene kan reduseres til en av disse mulighetene:

1. Sirkelen (elliptisk): $x^2 + y^2 = 1$
2. Parabelen (parabolsk): $y = x^2$

Hvor kommer $\sinh(x)$ fra?

Kvadratiske former er på formen

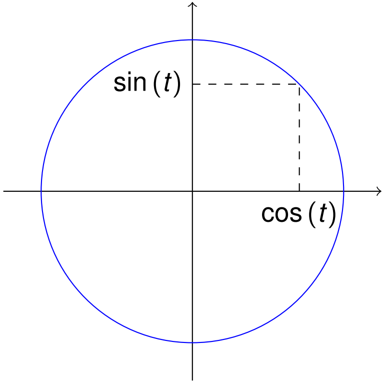
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Det viser seg at alle de interesante kurvene kan reduseres til en av disse mulighetene:

1. Sirkelen (elliptisk): $x^2 + y^2 = 1$
2. Parabelen (parabolsk): $y = x^2$
3. Hyperbelen (hyperbolsk): $x^2 - y^2 = 1$

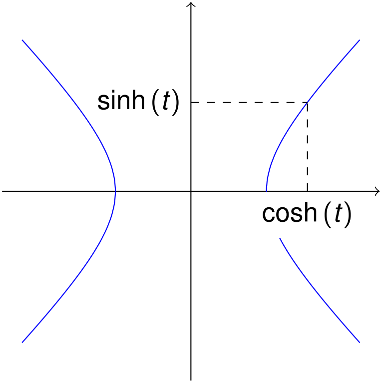
Hvor kommer $\sinh(x)$ fra?

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1$$



$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$