NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Plenumsregning

Matematikk 1

30.08.19

Hva skjer på plenumsregning?

— Gjennomgang av oppgaver/eksempler for å:

- forstå teorien bedre
- lære nyttige tips og triks
- utfylle OF og IF

Hva skjer på plenumsregning?

- Gjennomgang av oppgaver/eksempler for å:
  - forstå teorien bedre
  - lære nyttige tips og triks
  - utfylle OF og IF
- Oppgaver fra boka eller gamle eksamensoppgaver

Hva skjer på plenumsregning?

- Gjennomgang av oppgaver/eksempler for å:
  - forstå teorien bedre
  - lære nyttige tips og triks
  - utfylle OF og IF
- Oppgaver fra boka eller gamle eksamensoppgaver
- Oppgavene til plenumsregningen finner dere under “anbefalte oppgaver” på hjemmesiden.
- Kan være lurt å se kjapt over oppgavene før timen

Hva skjer på PR?

- Plenumsregningene er fredag 10.15-12.00 og 12.15-14.00 i F1.
- Det samme gjennomgås i begge øktene.
- Den andre økta filmes og legges ut.

Hva skjer på PR?

- Plenumsregningene er fredag 10.15-12.00 og 12.15-14.00 i F1.
- Det samme gjennomgås i begge øktene.
- Den andre økta filmes og legges ut.
- Spør gjerne om ting i pausen. (Spørsmål knyttet til temaer gjennomgått på plenumsregninger prioriteres over spørsmål om Maple T.A. eller innleveringer.)

Oppgave 1

Vis at ligningen $x^3 - 15x + 1 = 0$ har minst tre løsninger på intervallet $[-4, 4]$.
(Hint: Skjæringssetningen.)

Oppgave 1

Vis at ligningen $x^3 - 15x + 1 = 0$ har minst tre løsninger på intervallet $[-4, 4]$.
(Hint: Skjæringssetningen.)

(1) Skjæringssetningen

La f være en kontinuerlig funksjon på intervallet $[a, b]$, så finnes det for enhver s mellom $f(a)$ og $f(b)$ en $c \in [a, b]$ slik at $f(c) = s$.

Oppgave 1

Vis at ligningen $x^3 - 15x + 1 = 0$ har minst tre løsninger på intervallet $[-4, 4]$.
(Hint: Skjæringssetningen.)

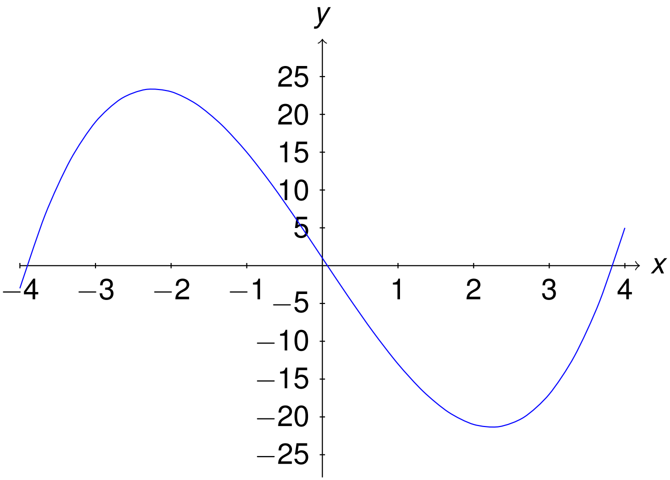
(1) Skjæringssetningen

La f være en kontinuerlig funksjon på intervallet $[a, b]$, så finnes det for enhver s mellom $f(a)$ og $f(b)$ en $c \in [a, b]$ slik at $f(c) = s$.

Set $f(x) = x^3 - 15x + 1$.

Mål: Del $[-4, 4]$ opp i tre (ikke overlappende) intervaller $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ og $[a_3, b_3]$ slik at $f(a_i)$ og $f(b_i)$ har motsatt fortegn.

Oppgave 1



Oppgave 2

La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en like (dvs. symmetrisk om $x = 0$) funksjon. Vis at dersom f er høyre-kontinuerlig i punktet $x = 0$ så er f kontinuerlig i $x = 0$.

Oppgave 2

La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en like (dvs. symmetrisk om $x = 0$) funksjon. Vis at dersom f er høyre-kontinuerlig i punktet $x = 0$ så er f kontinuerlig i $x = 0$.

Definisjoner

— En funksjon f er kontinuerlig i et punkt a hvis

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Oppgave 2

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en like (dvs. symmetrisk om $x = 0$) funksjon. Vis at dersom f er høyre-kontinuerlig i punktet $x = 0$ så er f kontinuerlig i $x = 0$.

Definisjoner

- En funksjon f er kontinuerlig i et punkt a hvis

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

- En funksjon er like (jevn) om $f(-x) = f(x)$.
(Eksempel: 1, $\cos(x)$, x^2, $|x|$.)

Oppgave 2

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en like (dvs. symmetrisk om $x = 0$) funksjon. Vis at dersom f er høyre-kontinuerlig i punktet $x = 0$ så er f kontinuerlig i $x = 0$.

Definisjoner

— En funksjon f er kontinuerlig i et punkt a hvis

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

— En funksjon er like (jevn) om $f(-x) = f(x)$.
(Eksempel: 1, $\cos(x)$, x^2, $|x|$.)

— En funksjon er odde om $f(-x) = -f(x)$.
(Eksempel: $\sin(x)$, $\tan(x)$, x, x^3.)

Oppgave 3

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(t) = |2 + t^3|$. Hvor eksisterer $f'(t)$? Bestem den deriverte $f'(t)$ der den eksisterer.

Oppgave 3

La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(t) = |2 + t^3|$. Hvor eksisterer $f'(t)$? Bestem den deriverte $f'(t)$ der den eksisterer.

Teori

En funksjon f er deriverbar i et punkt a om grensen

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a)$$

eksisterer.

Oppgave 3

La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(t) = |2 + t^3|$. Hvor eksisterer $f'(t)$? Bestem den deriverte $f'(t)$ der den eksisterer.

Teori

En funksjon f er deriverbar i et punkt a om grensen

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a)$$

eksisterer.

Absoluttverdien av x kan skrives på følgende form:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{når } x \geq 0 \\ -x & \text{når } x < 0. \end{cases}$$

Oppgave 3

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(t) = |2 + t^3|$. Hvor eksisterer $f'(t)$? Bestem den deriverte $f'(t)$ der den eksisterer.

Teori

En funksjon f er deriverbar i et punkt a om grensen

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a)$$

eksisterer.

Absoluttverdien av x kan skrives på følgende form:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{når } x \geq 0 \\ -x & \text{når } x < 0. \end{cases}$$

Faktorisering: $x^n - a^n = (x - a)\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-1}\right)$.

Oppgave 3

Er det ikke lettere å bruke at

$$\lim_{t \to -\sqrt[3]{2}^-} f'(t) \neq \lim_{t \to -\sqrt[3]{2}^+} f'(t)?$$

Dvs. f' er ikke kontinuerlig i $-\sqrt[3]{2}$.

Oppgave 3

Er det ikke lettere å bruke at

$$\lim_{t \to -\sqrt[3]{2}^-} f'(t) \neq \lim_{t \to -\sqrt[3]{2}^+} f'(t)?$$

Dvs. f' er ikke kontinuerlig i $-\sqrt[3]{2}$.

Moteksempel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Oppgave 3

Er det ikke lettere å bruke at

$$\lim_{t \to -\sqrt[3]{2}^-} f'(t) \neq \lim_{t \to -\sqrt[3]{2}^+} f'(t)?$$

Dvs. f' er ikke kontinuerlig i $-\sqrt[3]{2}$.

Moteksempel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin(1/h) = 0$$

Oppgave 4

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Bestem hvor f er økende og hvor f er avtagende.

Oppgave 5

Bruk den formelle definisjonen av grenseverdi til å vise at

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 4x - 3) = 2.$$

Mål:

Vil vise at for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer det en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - 1| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

Oppgave 5

Bruk den formelle definisjonen av grenseverdi til å vise at

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 4x - 3) = 2.$$

Mål:

Vil vise at for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer det en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

I en ideell verden: Vi har at for alle ε eksisterer det en δ, for eksempel $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{7}, 1\right)$, slik at

$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - 2| < \varepsilon.$$