TMA4100 Matematikk 1

Skriftlig innlevering 3

Høsten 2019

Innleveringsfrist: 25. oktober, kl. 16.00.

$\boxed{1}$ **a)** Vis at

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}. \qquad (*)$$

(Vink: Benytt substitusjonen $t = 1/x$.)

b) Bruk Simpsons metode for å finne en tilnærming S_{2n} til høyre side av $(*)$ med $2n = 4$.

c) Bruk **a)** og **b)** for å finne en tilnærming av

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Hvor god tilnærming får du?

$\boxed{2}$ La $f(x) = 4 - x^2$ for $1 \leq x \leq 3$.

a) Vis at det fins et tall $c \in (1,2)$ slik at $(c, f(c))$ er det punktet på grafen til $y = f(x)$ som ligger nærmest punktet $(1,0)$.
(Vink: La $g(x) = d(x)^2$, der $d(x)$ angir avtanden mellom punktet $(1,0)$ og punktet $(x, f(x))$, det vil si, $d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + f(x)^2}$. Finn så minimumspunktet til $g(x)$.)

b) Bruk Newtons metode til å finne en tilnærming av c med fire siffers nøyaktighet.

$\boxed{3}$ La $a_1 = 2$ og

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$

Vis at $\{a_n\}$ er avtagende og nedad begrenset av 0.

Vis deretter at følgen konvergerer og finn grenseverdien.

$\boxed{4}$ La $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ være en følge slik at $a_n > 0$ for alle n og $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergerer. Vis at

$$\sum_{n=1}^N a_n^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N a_n\right)^2,$$

der $N \geq n$ er et naturlig tall. Bruk så dette til å vise at

$$\sum_{n=1}^\infty a_n^2$$

konvergerer.