

Anbefalte oppgaver uke 43

Høsten 2019

Løsningsforslag

1 Vi er gitt følgen

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n n}{e^n} \right\}.$$

De første leddene i følgen er

$$a_1 = -\frac{1}{e}, \quad a_2 = \frac{2}{e^2}, \quad a_3 = -\frac{3}{e^3}, \quad a_4 = \frac{4}{e^4}.$$

Siden e^n vokser raskere enn n , ser vi at følgen er begrenset ovenfra av $\frac{2}{e^2}$ og nedenfra av $-\frac{1}{e}$. Videre er det en alternerende følge, da annenhvert ledd er positivt og negativt. Vi ser også at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = 0.$$

Det betyr at følgen konvergerer mot 0.

2 Vi beregner ved bruk at l'Hôpital

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5!}{e^n} = 0.$$

3 https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/sif5003_1999-08-02_lf.pdf

4 Dette er en geometrisk rekke med $k = 1/e$. Siden

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k},$$

og

$$\sum_{n=1}^{\infty} k^n = k \sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{k}{1-k},$$

får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1/e}{1-1/e} = \frac{1}{e-1}.$$

5 La oss starte med å skrive om rekken til en sum av to rekker,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}}.$$

Dette minner om noe som ligner på geometriske rekker. For en geometrisk rekke (sidene 505–507 i boka) har vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

når $|r| < 1$. Observer at ved å endre summasjonsgrensene kan vi skrive denne regelen på ekvivalent form

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

Vi ønsker nå å skrive om de to rekke på denne formen. Vi starter med den første,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

På tilsvarende vis får vi for den andre summen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^2 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Den totale summen får vi så ved å legge sammen de to bidragene,

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

- 6 I denne oppgaven bruker vi sammenligningstesten (Teorem 9 side 514 i boka). For $n > 0$ har vi at

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + n + 1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} = b_n.$$

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er en p -rekke (se side 512 i boka) og konvergerer siden $p = \frac{3}{2} > 1$. Ettersom $a_n \leq b_n$, konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ved sammenligningstesten.

- 7 Vi skal avgjøre om rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^3}$$

konvergerer eller divergerer. Her er det nyttig å huske at logaritmer vokser saktere enn alle potenser, det vil si at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \quad a > 0, \quad (1)$$

som oppgitt i Teorem 5 på side 184 i boka. Vi bruker derfor sammenligningstesten, og sammenligner med rekken $b_n = \frac{1}{n}$, som vi vet divergerer. Vi har at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\ln n)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(\ln n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6 \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6} = \infty,$$

der vi har brukt l'Hôpital gjentatte ganger. Ved sammenligningstesten (Teorem 10 side 515 i boka), divergerer $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)^3}$.