

Anbefalte oppgaver uke 37

Høsten 2018

Løsningsforslag

1 For å vise at f er en injektiv (*one-to-one*) funksjon, ser vi på den deriverte,

$$f'(x) = \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Vi ser at $f'(x) > 0$ for alle x . Det vil si at f er monotont voksende og derfor injektiv. Den inverse til f finner vi å la $y = f^{-1}(x)$. Da er

$$x = f(y) = \frac{y}{1+y},$$

og vi finner $f^{-1}(x)$ ved å løse for y :

$$\begin{aligned} x &= \frac{y}{1+y} \\ (1+y)x &= y \\ x + xy - y &= 0 \\ y(x-1) &= -x \\ y &= -\frac{x}{x-1} = \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

Altså er

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Vi ser at både telleren og nevneren i f er definert for alle verdier av $x \in \mathbb{R}$, men at f har en singularitet i $x = -1$. Derfor er domenet til f hele \mathbb{R} utenom punktet -1 . Dette kan vi skrive slik:

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Tilsvarende ser vi at

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Det følger nå av egenskapene til inverse funksjoner (side 167 i boka) at verdimengdene (*range*) til f og f^{-1} er

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f) &= \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ \mathcal{R}(f^{-1}) &= \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \end{aligned}$$

2 Vi starter med å derivere f (for $x \neq 0$):

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{hvis } x < 0, \\ \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} & \text{hvis } x > 0. \end{cases}$$

Siden $3x^2 > 0$ på $(-\infty, 0)$ og $x^{-\frac{2}{3}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 > 0$ på $(0, \infty)$ kan vi konkludere med at f er strengt voksende på hele \mathbb{R} . Dermed er f injektiv (en-til-en) og har en invers funksjon, f^{-1} .

For å finne f^{-1} merker vi oss først at $f(x) \geq 0$ hvis og bare hvis $x \geq 0$, og $f(x) < 0$ hvis og bare hvis $x < 0$. La oss først kikke på $y \geq 0$, og sette $y = f^{-1}(x)$. Da er

$$x = f(y) = \sqrt[3]{y} \implies f^{-1}(x) = y = x^3 \text{ når } x \geq 0.$$

Videre ser vi på tilfellet $y < 0$. Vi lar $y = f^{-1}(x)$ og finner at

$$x = f(y) = y^3 \implies f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x} \text{ når } x < 0.$$

Summa summarum får vi

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{hvis } x < 0, \\ x^3 & \text{hvis } x \geq 0. \end{cases}$$

3] Vi starter med å finne den deriverte til f ,

$$f'(x) = 6x^2.$$

Vi ser at $f'(x) \geq 0$ for alle x med $f'(x) = 0$ bare når $x = 0$. Dette viser at f er injektiv og at den har en invers.

Vi finner så f^{-1} ved å la $y = f^{-1}(x)$ og løse for y ,

$$x = f(y) = 1 + 2y^3 \implies y = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Det finnes nå to måter å regne ut $(f^{-1})'(x)$ på, enten direkte eller via formelen side 169 i læreboken. Hvis vi bruker formelen får vi at

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{6\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{6\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Alternativt, hvis vi deriverer f^{-1} direkte ved hjelp av kjerneregelen for derivasjon, får vi

$$(f^{-1})'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

4] Vi forenkler uttrykket ved å bruke reglene for logaritmer, side 172 i boka.

$$\begin{aligned} & \log_{\pi}(1 - \cos x) + \log_{\pi}(1 + \cos x) - 2 \log_{\pi} \sin x \\ &= \log_{\pi}((1 - \cos x)(1 + \cos x)) - 2 \log_{\pi} \sin x \\ &= \log_{\pi}(1 - \cos^2 x) - 2 \log_{\pi} \sin x \\ &= \log_{\pi} \sin^2 x - 2 \log_{\pi} \sin x \\ &= \log_{\pi} \sin^2 x - \log_{\pi} \sin^2 x \\ &= 0. \end{aligned}$$

- 5] Vi begynner med definisjonen på log

$$a = b^{\log_b a}.$$

Denne ligningen opphøyer vi i $\log_a x$, og får

$$x = a^{\log_a x} = b^{(\log_b a)(\log_a x)}.$$

Til slutt tar vi \log_b til hele greia

$$\log_b x = \log_b \left(b^{(\log_b a)(\log_a x)} \right) = (\log_b a)(\log_a x).$$

Ser bra ut. Her står det jo at

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

- 6] Vi ser først på det første leddet. Ved å bruke Teorem 3, punkt (i), side 178 i læreboken og deretter at e og ln er inverse av hverandre slik at $e^{\ln x} = x$ (se nederst side 177 i læreboken), får vi at

$$e^{2 \ln \cos x} = \left(e^{\ln \cos x} \right)^2 = (\cos x)^2.$$

På det andre leddet bruker vi også at e og ln er inverse av hverandre, men nå slik at $\ln e^x = x$. Da får vi at

$$(\ln e^{\sin x})^2 = (\sin x)^2.$$

Hvis vi summerer de to leddene står igjen med

$$e^{2 \ln \cos x} + (\ln e^{\sin x})^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

- 7] Vi deriverer uttrykket ved gjentatt bruk av kjernerregelen for derivasjon. Husk at $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ ($x > 0$), $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$) og $\frac{d}{dx} |x| = \frac{x}{|x|}$ ($x \neq 0$).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\ &= \frac{1}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|} \frac{d}{dx} |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\ &= \frac{1}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|} \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|} \frac{d}{dx} (x + \sqrt{x^2 - a^2}) \\ &= \frac{1}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|} \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - a^2}} \frac{d}{dx} (x^2 - a^2) \right) \\ &= \frac{1}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|} \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - a^2}} 2x \right). \end{aligned}$$

Vi bruker så at $|b||b| = b^2$ for et vilkårlig tall b . I vårt tilfelle kan vi sette $b = x + \sqrt{x^2 - a^2}$, slik at vi får

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right) \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{x\sqrt{x^2 - a^2} + x^2 - a^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2} (x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

8 https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/lf_tma4100_2013h.pdf

9 For å regne ut den deriverte av uttrykket $y = x^{\sqrt{x}}$ er det fordelaktig å ta logaritmen av begge sider først. Gjør vi dette får vi

$$\ln(|y|) = \ln\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x} \ln(|x|).$$

Deriverer vi venstre side med hensyn på x får vi

$$\operatorname{sgn}(y) \frac{dy}{dx} \frac{1}{|y|} = \frac{dy}{dx} \frac{1}{\operatorname{sgn}(y) |y|} = \frac{dy}{dx} \frac{1}{y},$$

mens venstre side blir

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(|x|) + \sqrt{x} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|} = \frac{\ln(|x|)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln(|x|) + 2}{2\sqrt{x}}.$$

Dermed blir den deriverte

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{\ln(|x|) + 2}{2\sqrt{x}} = x^{\sqrt{x}} \frac{\ln(|x|) + 2}{2\sqrt{x}}.$$

En av de store fordelene med å bruke notasjonen $\frac{d}{dx}$ er at vi sier hvilken variabel vi deriverer med hensyn på. Om vi ønsker å derivere med hensyn på y istedenfor kan vi skrive $\frac{d}{dy}$. Deriverer vi begge sider av

$$\ln(|y|) = \sqrt{x} \ln(|x|)$$

med hensyn på y får vi på venstresiden

$$\frac{\operatorname{sgn}(y)}{|y|} = \frac{1}{y}$$

og på høyresiden

$$\frac{dx}{dy} \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(|x|) + \frac{dx}{dy} \sqrt{x} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|} = \frac{dx}{dy} \frac{\ln(|x|)}{2\sqrt{x}} + \frac{dx}{dy} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{dx}{dy} \frac{\ln(|x|) + 2}{2\sqrt{x}}.$$

Dermed blir

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \frac{2\sqrt{x}}{\ln(|x|) + 2}.$$