TMA4100 Matematikk 1

Anbefalte oppgaver uke 44

Høsten 2018

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Avgjør om de positive rekkene under konvergerer eller divergerer.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(2n)^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$

$\boxed{2}$ a) Vis at rekka

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)$$

konvergerer. Konvergerer rekka absolutt eller betinget?

b) La S betegne summen av rekka i a). Partialsummen

$$S_9 = \sum_{n=2}^{9}(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)$$

er en tilnærming til S. Hva kan du si om $S - S_9$ (feilen til tilnærmingen)?

$\boxed{3}$ Avgjør om påstandene under er sanne eller gale. Begrunn svaret med et bevis eller et moteksempel.

a) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

b) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergerer, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutt.

c) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ absolutt.

$\boxed{4}$ a) Vis ved induksjon at for $n = 1, 2, 3, \ldots$ gjelder

$$\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i} = \sum_{m=1}^{2n}\frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

b) Bruk a) til å vise at $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \cdots = \ln 2$.

(Hint: Husk idéen bak integraltesten.)

Oppgaver med løsningsforslag

I oppgavene 1–3, avgjør om rekken konvergerer absolutt, betinget, eller divergerer.

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2^n}.$ $\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}.$ $\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100\cos n\pi}{2n+3}.$

$\boxed{4}$ Finn det minste tallet n som gjør at delsummen s_n tilnærmer

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!}$$

med en feil mindre enn 0.001 i absoluttverdi.

Avgjør for hvilke x rekkene i oppgavene 5 og 6 konvergerer.

$\boxed{5}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2n+3}.$

$\boxed{6}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n.$

I oppgavene 7 og 8, finn en delsum s_n som tilnærmer rekken med en feil på mindre enn 0.001 i absoluttverdi.

$\boxed{7}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}.$

$\boxed{8}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}.$

(Vink: se s. 513 i læreboken.)