

Anbefalte oppgaver uke 42

Høsten 2017

Løsningsforslag

- 1 Vi bruker Taylor-polynom til å løse denne oppgaven. Taylor-polynomet (Maclaurin-polynomet) til $\sin x$ om $x = 0$ er gitt som (side 278 i læreboken)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7).$$

Vi setter dette inn i grenseuttrykket og får

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)\right)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \mathcal{O}(x^4) \right) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Denne oppgaven kan også løses ved hjelp av l'Hôpitals regel, men denne må da anvendes tre ganger.

- 2 Me vil linearisera $f(x) = \sqrt{3 + x^2}$ om $x = 1$, altså vil me finna

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

for $a = 1$. Me deriverer og finn

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3 + x^2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{3 + x^2}}. \quad (1)$$

Ved innsetting i uttrykket for L finn me då

$$L(x) = 2 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

- 3 Me vil linearisera $f(x) = 1/\sqrt{x}$ om $x = 4$, altså vil me finna

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

for $a = 4$. Me deriverer og finn

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}. \quad (2)$$

Ved innsetting i uttrykket for L finn me då

$$L(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x - 4) = -\frac{x}{16} + \frac{3}{4}.$$

- 4 Lineariseringen av en funksjon f om et punkt a er gitt ved (Definisjon 8, side 267 i læreboken)

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

I vårt tilfelle er $f(x) = \cos(2x)$ og $a = \frac{\pi}{3}$. Dessuten har vi at

$$f'(x) = -2 \sin(2x).$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned} L(x) &= \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \frac{1}{2} - \sqrt{3}x. \end{aligned}$$

- 5 Taylorpolynomet av grad 3 til $f(x)$ rundt punktet $x = a$ er gitt ved

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3.$$

Nå er $f(x) = \cos x$, og $a = \pi/4$, så vi får

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3. \end{aligned}$$

- 6 Vi starter med å regne ut de tre første deriverte til $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Vi bruker så definisjonen av et andreordens Taylor polynom for f rundt $x = a$ (side 273 i læreboken), og regner ut $P_2(x)$ med $a = 64$,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(64) + f'(64)(x - 64) + \frac{f''(64)}{2}(x - 64)^2 \\ &= \sqrt{64} + \frac{1}{2} \cdot 64^{-\frac{1}{2}} \cdot (x - 64) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 64^{-\frac{3}{2}} \cdot (x - 64)^2 \\ &= 8 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(x - 64) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{152}(x - 64)^2 \\ &= 8 + \frac{x - 64}{16} - \frac{(x - 64)^2}{4096}. \end{aligned}$$

Vi finner så en approksimasjon til $\sqrt{61}$ ved sette inn $x = 61$,

$$\sqrt{61} \approx P_2(61) = 8 + \frac{-3}{16} - \frac{3}{4096} \approx 7,810302734.$$

Fra Taylors teorem (side 275 i læreboken), vet vi at feilen er gitt som ($n = 2$)

$$E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3}(x - 64)^3,$$

for en s mellom a og x . Vi ønsker å finne en øvre grense for feilen, det vil si at vi må finne den verdien av s som gjør $f'''(s)$ størst. Vi vet at $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$ er synkende på intervallet $[61, 64]$, slik at

$$\max_{s \in [61, 64]} f'''(s) = f'''(61) = \frac{3}{8}61^{-\frac{5}{2}}.$$

Dette betyr at vi kan finne en øvre grense på feilen,

$$|E_2(x)| \leq \left| \frac{f'''(61)}{6}(x - 64)^3 \right| = \frac{f'''(61)}{6}|x - 64|^3.$$

For $x = 61$ får vi at

$$|E_2(61)| \leq \frac{3}{8 \cdot 6} 61^{-\frac{5}{2}} |61 - 64|^3 \approx 0,000058066.$$

Det minste intervallet som vi med sikkerhet kan si inneholder $\sqrt{61}$ er derfor

$$(P_2(61) - 0,000058066, P_2(61) + 0,000058066) = (7,810244668, 7,810360800).$$

Fra kalkulatoren vet vi selvsagt at

$$\sqrt{61} \approx 7,810249676$$

med ni desimalers nøyaktighet. Vi ser at dette er innenfor intervallet.

7 Taylors formel av grad 6 for $f(x)$ rundt $x = a$ er

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3 + \dots \\ + \frac{f^4(a)}{24}(x - a)^4 + \frac{f^5(a)}{120}(x - a)^5 + \frac{f^6(a)}{720}(x - a)^6 + \frac{f^7(s)}{5140}(x - a)^7,$$

der s ligger mellom x og a . Siden

$$\frac{d}{dx^{n+1}} \ln x = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

og $a = 1$, får vi

$$\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 + \frac{1}{5}(x - 1)^5 - \frac{1}{6}(x - 1)^6 + \frac{1}{7s^7}(x - 1)^7,$$

der s ligger mellom 1 og x . Lagrange-resten er

$$E_n(x) = \frac{1}{7s^7}(x - 1)^7.$$

8 Vi lar $f(x) = \sin^2 x$. Taylor-polynomet av grad 4 til f om $x = 0$ er gitt som

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4.$$

Vi finner først de deriverte til f ,

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin^2 x, & f(0) = 0, \\ f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x, & f'(0) = 0, \\ f''(x) = 2 \cos 2x, & f''(0) = 2, \\ f^{(3)}(x) = -4 \sin 2x, & f^{(3)}(0) = 0, \\ f^{(4)}(x) = -8 \cos 2x, & f^{(4)}(0) = -8. \end{array}$$

Ved innsetting finner vi

$$P_4(x) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{8}{4!}x^4 = x^2 - \frac{1}{3}x^4.$$