Anbefalte oppgaver uke 38

Høsten 2017

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Gitt en funksjon $f(x)$, vet vi at vi kan approksimere arealet, A, begrenset av $y=0$, kurven $y=f(x)$, $x=a$ og $x=b$ som en sum av n rektangler med bredde $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ og høyde $f(x_i)$, der $x_i=a+i\Delta x$ og $i=1,\dots,n$,

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}\Delta x f(x_i).$$

Se figurene side 297 i boka for en illustrasjon. Vi ønsker derfor å skrive om vår sum på en slik form,

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{2n+3i}{n^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(2+3\frac{i}{n}\right).$$

Med $a=0$ og $b=1$ har vi $\Delta x=\frac{1}{n}$ og $x_i=\frac{i}{n}$, slik at

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta x(2+3x_i).$$

Ved sammenligning med summen øverst i denne oppgaven, ser vi at vår sum er en approksimasjon til arealet begrenset av $y=0$, $y=2+3x$, $x=0$ og $x=1$. Siden $y=2+3x$ er en rett linje, er dette området et trapes med høyde 1 og sidekanter 2 og 5, og med areal,

$$A=\frac{2+5}{2}\cdot 1=\frac{7}{2}.$$

Ved å la $n\to\infty$ vil summen S_n gå mot dette arealet. Altså er

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{7}{2}.$$

$\boxed{2}$ Vi er gitt funksjonen $f(x)=1-x$. Vi deler intervallet $[0,2]$ inn i n like store underintervall $[x_{i-1},x_i]$, $i=0,1,\dots,n$, med størrelse $\Delta x=\frac{2}{n}$, og der $x_i=i\Delta x=\frac{2i}{n}$. Mengden av punkter $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ er nå en partisjon, P_n, av intervallet $[0,2]$. Siden $f(x)$ er en synkende funksjon for alle x, har vi at minimum av f på intervallet $[x_{i-1},x_i]$ er $l_i=x_i$, og tilsvarende at maksimum på intervallet $[x_{i-1},x_i]$ er $u_i=x_{i-1}$. Den nedre Riemann-summen for f og P_n er nå gitt ved (se Definisjon 2 side 300 i boka)

$$\begin{aligned}L(f,P_n)&=\sum_{i=1}^{n}f(l_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\\&=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}1-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}=2-\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\\&=2-\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=2-\frac{2n^2+2n}{n^2}=-\frac{2}{n}.\end{aligned}$$

Her har vi blant annet brukt summeringsreglene (a) og (b) i Teorem 1, side 291 i boka. På tilsvarende måte kan vi finne et uttrykk for den øvre Riemann-summen,

$$\begin{aligned}
U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-x_{i-1}) \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2(i-1)}{n} = 2 - \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\
&= 2 - \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 = 2 - \frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{4}{n} \\
&= 2 - \frac{2n^2+2n}{n^2} + \frac{4}{n} = -\frac{2}{n} + \frac{4}{n} = \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Vi ser at

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = 0.$$

Dette betyr at

$$\int_0^2 (1-x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

<u>Kommentar:</u> Hvorfor impliserer $\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = L$ at integralet eksisterer?

Fra definisjonen på et bestemt integral (Definisjon 3, side 302 i boka) har vi at f er integrerbar på $[a,b]$ dersom det bare finnes et tall I slik at for alle partisjoner P av $[a,b]$, så har vi at

$$L(f,P) \le I \le U(f,P). \tag{1}$$

Vi må altså vise at denne betingelsen gjelder. La P være en vilkårlig partisjon av $[a,b]$. Vi kan da finne en uniform partisjon P_{n^*} som er like fin eller finere enn P ved å velge n^* stor nok. Da vet i at

$$L(f,P_{n^*}) \ge L(f,P).$$

Dette gjelder også i grensen $n\to\infty$, slik at

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) \ge L(f,P).$$

Siden P er vilkårlig, vil denne ulikheten gjelde for alle P. Tilsvarende kan vi vise at

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) \le U(f,P),$$

for alle P. Ved å sette sammen disse ulikhetene har vi at

$$L(f,P) \le \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = L = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) \le U(f,P),$$

for alle P. Siden betingelsen (1) skal gjelde for alle partisjoner P, også P_n for alle n, må vi kreve at $I = L$ for at den skal være tilfredsstilt. Ingen andre valg av I vil oppfylle (1). Vi har altså vist at f er integrerbar på $[a,b]$ med

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = L$$

når $\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = L$.

$\boxed{3}$ I denne oppgaven bruker vi spesielt linearitet i det bestemte integralet og additivitet av integrasjonsintervaller (se punktene (c) og (d) i Teorem 3 side 106 i boka), henholdsvis

$$\int_a^b Af(x)\,\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{for alle konstanter } A,$$

og

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vi starter med å dele opp hvert ledd i integraler over intervallene $[0,1]$, $[1,2]$ og $[2,3]$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 3f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x,\\
&\int_1^3 3f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x,\\
-&\int_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x,\\
-&\int_1^2 2f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Hvis vi summerer alle bidragene til intervallene over $[0,1]$ står vi igjen med

$$3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

For intervallet $[1,2]$ står vi igjen med

$$3\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Til slutt, for intervallet $[2,3]$ står vi igjen med

$$3\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dersom vi nå summerer alle disse leddene står vi igjen med

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Uttrykket i oppgaven kan altså forenkles til integralet av $f(x)$ over intervallet $[0,3]$.

$\boxed{4}$ Vi skal finne gjennomsnittsverdien til f over $[-2,2]$. Den er gitt som (se Definisjon 4 side 309 i boka)

$$\bar{f} = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-2}^2 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x.$$

Vi vet at $F(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$ er den antideriverte til $f(x)$ siden $F'(x) = \mathrm{e}^{3x} = f(x)$. Fra analysens fundamentalteorem (The Fundamental Theorem of Calculus, side 311 i boka) følger det at

$$\begin{aligned}
\bar{f} = \frac{1}{4}\int_{-2}^2 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\left(F(2) - F(-2)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{6} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-6}\right)\\
&= \frac{1}{12}\left(\mathrm{e}^{6} - \mathrm{e}^{-6}\right) = \frac{1}{6}\sinh(6) \approx 33{,}619.
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Vi bruker substitusjon, og lar $u = x^3$. Da har vi at $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Innsatt i integralet får vi nå at

$$I = \int \frac{x^2}{2+x^6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3x^2}{3(2+x^6)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}.$$

Vi ser nå at $u = x^3$ var et godt valg fordi vi står igjen med en enklere integrand som kun er avhengig av u. Vi gjenkjenner integranden, $\frac{1}{2+u^2}$, som den antideriverte til $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)$ (se punkt 16 øverst side 318 i boka). Altså har vi at

$$\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Vi setter så inn igjen for u, og får at

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{6}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x^3}{2}\right) + C.$$

Husk at vi enkelt kan undersøke om vi har regnet riktig ved å derivere svaret og se om vi da ender opp med integranden.

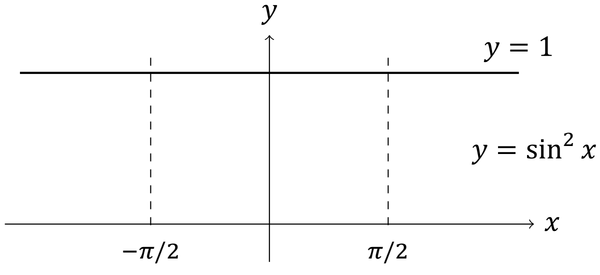
$\boxed{6}$ Me ser at funksjonen $y = \frac{x}{x^2+16}$ er ikkje-negativ for $x \in [0,2]$. Dermed kan me finna arealet A til området avgrensa av $y = \frac{x}{x^2+16}$, $y = 0$, $x = 0$ og $x = 2$ ved å integrera den første avgrensinga med omsyn på x frå 0 til 2,

$$A = \int_0^2 \frac{x}{x^2+16}dx.$$

Dette integralet kan løysast ved hjelp av substitusjonen $u = x^2 + 16$, som gjev $du = 2x\,dx$. Dermed får me svaret

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \frac{x}{x^2+16}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{16}^{20}\frac{1}{u}du \\ &= \frac{1}{2}[\ln u]_{u=16}^{20} \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

$\boxed{7}$ Vi skisserer først kurvene og finner området vi skal finne arealet av:



Vi er altså ute etter arealet, A, mellom kurvene $y = 1$ og $y = \sin^2 x$, se det skraverte feltet i figuren over. Disse kurvene skjærer hverandre i $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Da er

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Vi har her brukt at $1 - \sin^2 x$ er en like funksjon slik at integralet over intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ er lik to ganger intergralet over intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Videre gjenkjenner vi det første integralet som arealet av rektangelet gitt av linjene $y = 0$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{\pi}{2}$, mens det andre integralet er arealet under kurven $y = \sin^2 x$ mellom $x = -\frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{\pi}{2}$. Det første integralet kan vi enkelt evaluere, mens for det andre bruker vi at $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ og at $\int \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

$$\begin{aligned} A &= 2\,x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi/2} \\ &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$\boxed{8}$ `https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2014h.pdf`