

Anbefalte oppgaver uke 38

Høsten 2017

Oppgaver til plenumsregning

1 La

$$S_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{j}{n}\right)^2}.$$

Tolk S_n som en sum av arealer av rektangler som tilnærmer arealet under en kurve. Bruk dette til å bestemme grenseverdien $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

2 Finn en funksjon f slik at

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{-\frac{k^2}{n^2}}$$

er en Riemannsum for f på intervallet $[0, 1]$. Bruke dette til å bestemme grenseverdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{-\frac{k^2}{n^2}}.$$

3 Finn gjennomsnittsverdien av funksjonen $f(x) = |x + 1| \operatorname{sgn}(x)$ på intervallet $[-2, 2]$, der

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

4 La

$$F(t) = \int_0^t \cos(x^2) dx,$$

og finn $\frac{d}{dx} F(\sqrt{x})$.

5 Regn ut integralene

$$i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x} dx \quad ii) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin x} dx.$$

(Hint: $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$ og $\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$.)

Oppgaver med løsningsforslag

1 Regn ut

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2n + 3i}{n^2}.$$

2 Oppgave 5.3.8 fra Adams.

3 Forenkle uttrykket

$$\int_0^2 3f(x) dx + \int_1^3 3f(x) dx - \int_0^3 3f(x) dx - \int_1^2 3f(x) dx.$$

4 Finn gjennomsnittsverdien til $f(x) = e^{3x}$ på intervallet $[-2, 2]$.

5 Regn ut

$$\int \frac{x^2 dx}{2 + x^6}.$$

6 Finn arealet begrenset av $y = x/(x^2 + 16)$, $y = 0$, $x = 0$ og $x = 2$.

7 Funksjonene $y = \sin^2(x)$ og $y = 1$ avgrensner et uendelig antall noe avrundede pizzastykker. Finn arealet av et av disse.

8 Beregn

$$\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx.$$

(H14)