Løsningsforslag — Øving 6

6.1.4 Vi skal evaluere det ubestemte integralet

$$I = \int (x^2 - 2x)\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x.$$

Vi starter med å dele opp integralet i to,

$$I = \int x^2\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x - 2\int x\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x.$$

La oss først se på integralet $I_2 = \int x\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x$. Vi bruker delvis integrasjon og følger notasjonen side 333 i læreboken. La $U = x$ og $\mathrm{d}V = \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x$, slik at $\mathrm{d}U = \mathrm{d}x$ og $V = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$. Vi har nå at

$$\begin{aligned} I_2 = \int x\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \int U\,\mathrm{d}V &= UV - \int V\,\mathrm{d}U \\ &= x\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx} - \int \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{k}\mathrm{e}^{kx} - \frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{kx} + \tilde{C} \\ &= \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\left(x - \frac{1}{k}\right) + \tilde{C}. \end{aligned}$$

For å evaluere $I_1 = \int x^2\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x$ bruker vi samme metode, men nå setter vi $U = x^2$ og $\mathrm{d}V = \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x$, slik at $\mathrm{d}U = 2x\,\mathrm{d}x$ og $V = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$. Dette gir

$$\begin{aligned} I_1 = \int x^2\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \int U\,\mathrm{d}V &= UV - \int V\,\mathrm{d}U \\ &= x^2\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx} - \int \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{k}\mathrm{e}^{kx} - \frac{2}{k}\int x\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{k}\mathrm{e}^{kx} - \frac{2}{k}I_2 \\ &= \frac{x^2}{k}\mathrm{e}^{kx} - \frac{2}{k}\cdot\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\left(x - \frac{1}{k}\right) - \frac{2}{k}\tilde{C} \\ &= \frac{x^2}{k}\mathrm{e}^{kx} - \frac{2x}{k^2}\mathrm{e}^{kx} + \frac{2}{k^3}\mathrm{e}^{kx} - \frac{2}{k}\tilde{C} \\ &= \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\left(x^2 - \frac{2x}{k} + \frac{2}{k^2}\right) - \frac{2}{k}\tilde{C}. \end{aligned}$$

Vi summerer nå sammen de to integralene og får

$$\begin{aligned} I = I_1 - 2I_2 &= \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\left(x^2 - \frac{2x}{k} + \frac{2}{k^2} - 2x + 2\frac{1}{k}\right) - \frac{2}{k}\tilde{C} + \tilde{C} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k^3}\left(k^2x^2 - 2kx + 2 - 2k^2x + 2k\right) + C \\ &= \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k^3}\left(k^2(x-1)x - 2k(x-1) + 2\right) + C. \end{aligned}$$

I utregningene over har vi satt $C = -\frac{2}{k}\tilde{C} + \tilde{C}$.

Husk at vi enkelt kan undersøke om vi har regnet riktig ved å derivere svaret og se om vi da ender opp med integranden.

$\boxed{\text{6.1.26}}$ Me startar med å følgja tommelfingerregelen (ii) på side 334 i boka, og set $U = \sin^{-1}(x)$ og $dV = dx$. Då får me

$$\begin{aligned} \int \left(\sin^{-1}(x)\right)^2 dx &= \int U^2\, dV \\ &= U^2V - 2\int VU\, dU \\ &= x\left(\sin^{-1}(x)\right)^2 - 2\int x\sin^{-1}(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \end{aligned}$$

der me har brukt uttrykket for den deriverte av arcsin på side 193 i boka. Igjen har me eit integral med ein invers trigonometrisk funksjon i integranden, så me gjentar prosedyren ved å setja $U = \sin^{-1}(x)$ og $dV = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Ved å studera dV kan ein sjå at dette er den deriverte av $-\sqrt{1-x^2}$. Dette kan ein òg visa ved å integrera dV med omsyn på x og bruk av substitusjonen $u = 1 - x^2$. Dermed har ein

$$\begin{aligned} \int \sin^{-1}(x)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx &= \int U\, dV \\ &= UV - \int V\, dU \\ &= \sin^{-1}(x)(-\sqrt{1-x^2}) - \int (-\sqrt{1-x^2})\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ &= -\sin^{-1}(x)\sqrt{1-x^2} + x + C_0. \end{aligned}$$

Ved å kombinera dei føregåande uttrykka får ein svaret

$$\begin{aligned} \int \left(\sin^{-1}(x)\right)^2 dx &= x\left(\sin^{-1}(x)\right)^2 - 2\left(-\sin^{-1}(x)\sqrt{1-x^2} + x + C_0\right) \\ &= x\left(\sin^{-1}(x)\right)^2 + 2\sin^{-1}(x)\sqrt{1-x^2} - 2x + C. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{6.2.10}}$ Vi ser at integranden er en rasjonal funksjon der nevneren er av høyere orden enn telleren. Vi bruker derfor delbrøkoppspalting. Telleren, $3x^2 + 8x - 3$, har røttene $x = \frac{1}{3}$ og $x = -3$, slik at vi kan skrive integranden som

$$\frac{x}{3x^2 + 8x - 3} = \frac{x}{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+3)} = \frac{x}{(3x-1)(x+3)}.$$

Vi søker nå å skrive dette på formen

$$\frac{x}{(3x-1)(x+3)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x+3},$$

der A og B er konstanter. Vi multipliserer begge sider med felles faktor, og får at

$$x = A(x+3) + B(3x-1) = (A+3B)x + (3A-B).$$

Vi må altså kreve at

$$\begin{aligned} A + 3B &= 1, \quad \text{og} \\ 3A - B &= 0. \end{aligned}$$

Den andre ligningen gir $B = 3A$, som innsatt i den første ligningen gir at

$$A + 3 \cdot 3A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{10}.$$

Dette gir igjen

$$B = 3A = \frac{3}{10}.$$

Vi er nå klare til å evaluere integralet,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(3x-1)(x+3)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{10(3x-1)} + \frac{3}{10(x+3)} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{10} \int \frac{\mathrm{d}x}{3x-1} + \frac{3}{10} \int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} \ln(3x-1) + \frac{3}{10} \ln(x+3) + C \\ &= \frac{1}{30} \left(\ln(3x-1) + 9 \ln(x+3) \right) + C \end{aligned}$$

Her har vi brukt at $\frac{\mathrm{d}}{dx} \ln(ax+b) = \frac{1}{ax+b} \cdot a$ slik at $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C$.

$\boxed{6.2.18}$ Me antar at $a \neq 0$, i motsett tilfelle er svaret ganske enkelt

$$\int \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

Ved å bruka konjugatsetninga to gonger kan ein skriva integranden som

$$\frac{1}{x^4 - a^4} = \frac{1}{(x^2-a^2)(x^2+a^2)} = \frac{1}{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}.$$

Me ønsker no å delbrøksoppspalta integranden, og bruker teoremet på side 345 i boka,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)} &= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} + \frac{Cx+D}{x^2+a^2} \\ &= \frac{A(x+a)(x^2+a^2) + B(x-1)(x^2+a^2) + (Cx+D)(x^2-a^2)}{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}, \end{aligned}$$

som impliserer

$$A(x+a)(x^2+a^2)+B(x-1)(x^2+a^2)+(Cx+D)(x^2-a^2)=1.$$

Etter litt opprydding får ein at dette er ekvivalent med

$$(A+B+C)x^3+(a(A-B)+D)x^2+a^2(A+B-C)x+a^2(a(A-B)-D)=1.$$

Frå uttrykket ovanfor får ein då likningssystemet

$$\begin{aligned} A+B+C&=0\\ a(A-B)+D&=0\\ A+B-C&=0\\ a^3(A-B)-a^2D&=1 \end{aligned}$$

Ved å subtrahera tredje likning frå første får ein at $2C=0$, altså $C=0$. Dette betyr at $A+B=0$. Ved å gonga andre likning med a^2 og subtrahera denne frå siste likning får ein $-2a^2D=1$, altså er $D=-\frac{1}{2a^2}$. Om ein i staden adderer uttrykka får ein $2a^3(A-B)=1$, og kombinert med $A+B=0$ gjev dette $A=\frac{1}{4a^3}$ og $B=-\frac{1}{4a^3}$.

Dermed kan ein løysa integralet på følgjande vis,

$$\begin{aligned} \int\frac{dx}{x^4-a^4}&=\frac{1}{4a^3}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{1}{4a^3}\int\frac{dx}{x+a}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}\\ &=\frac{1}{4a^3}\ln|x-a|-\frac{1}{4a^3}\ln|x+a|-\frac{1}{2a^3}\tan^{-1}(x)+C, \end{aligned}$$

der ein har nytta resultata frå side 340 i boka til å evaluera dei tre integrala.

$\boxed{6.3.6}$ Me ser at integranden inneheld ein faktor på forma $\sqrt{a^2-x^2}$, så det er naturleg å bruka substitusjonen $x=a\sin(\theta)$, her med $a=3$. Dermed får me

$$\begin{aligned} \int\frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}&=\int\frac{3\cos(\theta)\,d\theta}{3\sin(\theta)\sqrt{9(1-\sin^2(\theta))}}\\ &=\frac{1}{3}\int\frac{\cos(\theta)\,d\theta}{\sin(\theta)\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}\\ &=\frac{1}{3}\int\csc(\theta)\,d\theta\\ &=-\frac{1}{3}\ln|\csc(\theta)+\cot(\theta)|+C. \end{aligned}$$

For å skriva dette om til eit uttrykk som avhenger av x kan ein nytta Figur 6.1 på side 347 i boka til å fastslå at $\csc(\theta)=\frac{3}{x}$ og $\cot(\theta)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. Dermed har ein at svaret er

$$\begin{aligned} \int\frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}&=-\frac{1}{3}\ln|\frac{3}{x}+\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}|+C\\ &=\frac{1}{3}(\ln|x|-\ln|3+\sqrt{9-x^2})+C. \end{aligned}$$

6.3.44 Me nyttar substitusjonen på side 353 i boka, $x = \tan(\theta/2)$, som medfører $\cos(\theta) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\sin(\theta) = \frac{2x}{1+x^2}$ og $d\theta = \frac{2\,dx}{1+x^2}$. Integralgrensene blir følgjeleg $x = \tan(0) = 0$ og $x = \tan(\pi/4) = 1$. Dermed får me

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{1+\cos(\theta)+\sin(\theta)} &= \int_0^1 \frac{\frac{2\,dx}{1+x^2}}{\frac{(1+x^2)+(1-x^2)+2x}{1+x^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \\ &= \ln(1+x)\Big|_0^1 \\ &= \ln(2).\end{aligned}$$

6.5.16 Vi gjenkjenner integralet som et uegentlig integral av type 1 (Definisjon 1, side 362 i læreboken). Vi bestemmer først det ubestemte integralet $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$. Ved å gjøre substitusjonen $u = \ln x$, har vi at $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, slik at

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln u + C = \ln(\ln x) + C.$$

Vi har nå at

$$\begin{aligned}\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} &= \lim_{R\to\infty} \int_e^R \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} \\ &= \lim_{R\to\infty} [\ln(\ln R) - \ln(\ln e)] \\ &= \lim_{R\to\infty} \ln(\ln R).\end{aligned}$$

Siden $\lim\limits_{R\to\infty} \ln R = \infty$ må også $\lim\limits_{R\to\infty} \ln(\ln R) = \infty$, slik at integralet divergerer.

6.5.40 For å fastslå om integralet

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\ln(x)}$$

konvergerer eller divergerer er det enklast om me kan estimera integranden med ein funksjon som enkelt kan integrerast over $[2,\infty)$. Lat oss derfor starta med å samanlikna dei to faktorane i nemnaren på dette intervallet. Ein ser at for $x = 2$ har ein $\sqrt{2} - \ln(2) > 0$. Ved å derivera finn ein

$$(\sqrt{x} - \ln(x))' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Her ser me at den deriverte er positiv for $x > 4$ og negativ for $2 \le x < 4$. Dette betyr at differansen når sitt minimum på $[2,\infty)$ i $x = 4$, der $\sqrt{4} - \ln(4) = 2(1-\ln(2)) > 0$. Dei føregåande observasjonane gjev at $\sqrt{x} > \ln(x)$ for for $x \ge 2$, og dermed har ein

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\ln(x)} > \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \int_2^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \ln(R) - \ln(2) = \infty. \tag{1}$$

Frå dette konkluderer me at integralet divergerer.