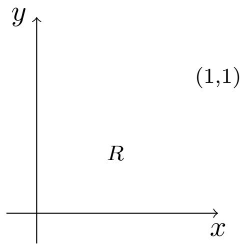
Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 10

7.1.6: Vi tegner først opp området, R, i xy-planet som skal roteres om henholdsvis x- og y-aksen.



Vi lar så $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$. Disse skjærer hverandre i $(x, y) = (1, 1)$.

a) Vi roterer R om x-aksen. Volumet av rotasjonslegemet (*Solids of Revolution*, side 393 i læreboken) er da gitt som

$$V = \underbrace{\pi \int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x}_{V_1} - \underbrace{\pi \int_0^1 g(x)^2 \, \mathrm{d}x}_{V_2} = \pi \int_0^1 \left(f(x)^2 - g(x)^2 \right) \mathrm{d}x.$$

Her tilsvarer V_1 og V_2 henholdsvis volumet som fremkommer ved å rotere området under $y = f(x)$ og $y = g(x)$ om x-aksen. Vi evaluerer så integralet,

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^2 - x^4 \right) \mathrm{d}x = \pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}.$$

b) Vi roter R om y-aksen. Nå bruker vi sylinderskallmetoden (*Cylindrical Shells*, side 396 i læreboken). Høyden til sylinderskallene blir her $f(x) - g(x)$, slik at

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^1 x \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^1 x \left(x - x^2 \right) \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(x^2 - x^3 \right) \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

7.2.6: Tverrsnittet av legemet er en likesidet trekant med sider $\sqrt{x}$. Arealet av en likesidet trekant med sider s er $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$, slik at tverrsnittarealet til legemet er gitt som

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x.$$

Siden legemets utstrekning er fra $x = 1$ til $x = 4$, blir volumet

$$V = \int_1^4 A(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{\sqrt{3}}{4}x\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{2}x^2\Big|_1^4 = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(4^2 - 1^2\right) = \frac{15\sqrt{3}}{8}.$$

7.3.4: Lengden s til en kurve $y = f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ er gitt som (se side 405 i læreboken)

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Kurven vår er gitt som $y^2 = (x-1)^3$, så vi deriverer derfor implisitt,

$$\begin{aligned} 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 3(x-1)^2 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{3(x-1)^2}{2y}, \\ \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 &= \frac{9(x-1)^4}{4y^2} = \frac{9(x-1)^4}{4(x-1)^3} = \frac{9}{4}(x-1). \end{aligned}$$

Legg merke til at $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ er definert for alle $x, y > 0$. Vi har nå at

$$\begin{aligned} s &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x-1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \sqrt{\frac{9}{4}x - \frac{5}{4}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{9x-5}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Vi lar så $u = 9x - 5$ slik at $\mathrm{d}u = 9\,\mathrm{d}x$ eller $\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\,\mathrm{d}u$. Integrasjonsgrensene blir $u_1 = 9 \cdot 1 - 5 = 4$ og $u_2 = 9 \cdot 2 - 5 = 13$.

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{18}\int_4^{13} u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{18}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_4^{13} \\ &= \frac{1}{27}\left(13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{27}\left(13^{\frac{3}{2}} - 8\right) \approx 1,44. \end{aligned}$$

7.3.18: Det første vi må gjøre her, er å finne ellipsens halvakser. Det gjøres ved å skrive ellipsen på standardform,

$$3x^2 + y^2 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$$

Da ser vi at $a = \sqrt{3}$ og $b = 1$. (Vanligvis omvendt, men den lange halvaksen må nesten hete a her.) Så kiker vi på s. 408, pugger utledningen, og skjønner at vi må beregne integralet

$$E(\epsilon) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t}\, dt,$$

der $\epsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a = \sqrt{2/3}$ er ellipsens eksentrisitet. (Altså hvor snodig den er.) Integralet som skal beregnes, blir

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{2}{3} \sin^2 t}\, dt,$$

og som vår numeriske metode, velger vi midtpunktmetoden, for da slipper vi å beregne så mange deriverte når vi skal analysere feilen. For midtpunktmetoden har vi at

$$|\int_a^b f(t)\, dt - M_n| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2},$$

der M_n er tilnærmingen med n delintervaller, og $|f''(t)| \leq K$ på $[a, b]$. Hvis $f(t) = \sqrt{1 - \frac{2}{3}\sin^2 t}$, har vi

$$f''(t) = -\frac{2}{3} \frac{\cos 2t \sqrt{1 - \frac{2}{3}\sin^2 t} + \frac{2}{3} \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}\sin^2 t}}}{1 - \frac{2}{3}\sin^2 t}.$$

VI skriver nå

$$|f''(t)| = |\frac{2}{3} \frac{\cos 2t \sqrt{1 - \frac{2}{3}\sin^2 t} + \frac{2}{3} \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}\sin^2 t}}}{1 - \frac{2}{3}\sin^2 t}| \leq \frac{2}{3} \frac{|\cos 2t||\sqrt{1 - \frac{2}{3}\sin^2 t}| + \frac{2}{3}|\frac{\sin t \cos t}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}\sin^2 t}}|}{|1 - \frac{2}{3}\sin^2 t|}.$$

Siden $|\cos 2t| \leq 1$, $\frac{1}{3} \leq |1 - \frac{2}{3}\sin^2 t| \leq 1$ og $\sin t \cos t \leq \frac{1}{2}$ (hvorfor?) kan vi skrive

$$|f''(t)| = \frac{2}{9} \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{3}}),$$

så derfor er

$$|\int_0^{\pi/2} f(t)\, dt - M_n| \leq \frac{2}{9} \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) \frac{\pi^3}{8 \cdot 24n^2}.$$

Vi må ha at

$$|\int_0^{\pi/2} f(t)\, dt - M_n| \leq \frac{2}{9} \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) \frac{\pi^3}{8 \cdot 24n^2} \leq 5 \cdot 10^{-5},$$

og da må

$$n \geq \sqrt{5 \cdot 10^5 \cdot \frac{2}{9} \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) \frac{\pi^3}{8 \cdot 24}} \approx 2845.$$

Nå er det bare å bruke formelen for midpunktmetoden (s. 372 i boken), og beregne

$$M_n = \frac{\pi}{2 \cdot 2845} \sum_{i=0}^{2845} f(x_i) = 1.26130262754.$$

7.3.20: Vi bruker formelen på s. 409 i læreboken, og får

$$A = \int_0^2 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{8} \int_0^{16} \sqrt{1 + u}\, du = \frac{2}{3} 16^{3/2} = \frac{128}{3}.$$

Merk at vi ikke trenger absoluttverditegn på x, siden $0 \leq x \leq 2$.

Challenging problem 2, side 330

c) Vi vet at

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b,\\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b,\end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned}\cos\left(\left(j+\tfrac{1}{2}\right)t\right) - \cos\left(\left(j-\tfrac{1}{2}\right)t\right) &= \cos(jt)\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right) - \sin(jt)\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)\\ &\quad - \left(\cos(jt)\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right) + \sin(jt)\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)\right)\\ &= -2\sin(jt)\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right).\end{aligned}$$

Dermed har vi at

$$\sin(jt) = \frac{\cos\left(\left(j-\frac{1}{2}\right)t\right) - \cos\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.$$

Vi må kreve at $\sin\left(\frac{1}{2}t\right) \neq 0$, det vil si at $\frac{t}{2\pi}$ ikke er et heltall. Hvis vi så summerer over $j = 1, 2, \ldots, n$ på begge sider får vi at

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \sin(jt) &= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\cos\left(\left(j-\frac{1}{2}\right)t\right) - \cos\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \right\}\\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n} \left\{\cos\left(\left(j-\frac{1}{2}\right)t\right) - \cos\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)t\right)\right\}}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.\end{aligned}$$

La oss se litt nærmere på summen i telleren ved å skrive ut noen av leddene,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} \left\{\cos\left(\left(j-\tfrac{1}{2}\right)t\right) - \cos\left(\left(j+\tfrac{1}{2}\right)t\right)\right\}\\ &\quad = \left(\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right) - \cos\left(\tfrac{3}{2}t\right)\right) + \left(\cos\left(\tfrac{3}{2}t\right) - \cos\left(\tfrac{5}{2}t\right)\right) + \left(\cos\left(\tfrac{5}{2}t\right) - \cos\left(\tfrac{7}{2}t\right)\right)\\ &\qquad + \ldots + \left(\cos\left(\left(n-\tfrac{1}{2}\right)t\right) - \cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right)\right)\\ &\quad = \cos\left(\tfrac{1}{2}t\right) - \cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right).\end{aligned}$$

Vi ser at alle leddene utenom det første og det siste kanselleres mot hverandre. Slike summer kaller vi gjerne teleskopsummer (se side 292–293 i læreboken). Vi har altså vist at

$$\sum_{j=1}^{n} \sin(jt) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.$$

d) La $f(x) = \sin x$ og del intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ opp i n like store intervaller, $[x_{i-1}, x_i]$, der $x_i = i\frac{\pi}{2n}$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. Størrelsen på hvert intervall er da $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$. Vi har nå en partisjon, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, av intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$. Hvis vi videre lar $c = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kan vi sette opp en Riemann-sum,

$$R(f, P, c) = \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x = \sum_{j=1}^{n} \sin(i\tfrac{\pi}{2n})\tfrac{\pi}{2n}.$$

Vi vet at

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} R(f,P,c)$$

(se side 303–304 i læreboken). Vi setter så uttrykket vi fant i **a)** med $t = \frac{\pi}{2n}$ inn i uttrykket for Riemann-summen,

$$R(f,P,c) = \sum_{j=1}^{n} \sin\left(i\frac{\pi}{2n}\right)\frac{\pi}{2n} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}\frac{\pi}{2n}.$$

Legg merke til at $\frac{t}{2\pi} = \frac{1}{4n}$, det vil si ikke et heltall. Videre kan vi vise ved hjelp av addisjonsregelen for cosinus at

$$\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right).$$

Vi står da igjen med

$$R(f,P,c) = \frac{\pi}{4}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} + \frac{1}{n}\right).$$

Når vi nå skal evaluere $R(f,P,c)$ i grensen $n \to \infty$, bruker vi Taylor-polynomene til $\cos y$ og $\sin y$ om $y = 0$,

$$\begin{aligned}\cos y &= 1 - \frac{y^2}{2} + \mathcal{O}(y^4),\\ \sin y &= y + \mathcal{O}(y^3).\end{aligned}$$

Med $y = \frac{\pi}{4n}$ får vi at

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} R(f,P,c) &= \frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} + \frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}\\ &= \frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4n}\right)^2}{2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\pi}{4n}\right)^4\right)}{n\left(\frac{\pi}{4n} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\pi}{4n}\right)^3\right)\right)}\\ &= \frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1 - \frac{\pi^2}{32n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{\pi}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}\\ &= \frac{\pi}{4}\frac{4}{\pi} = 1.\end{aligned}$$

Vi har brukt at $\mathcal{O}\left(\frac{a}{n^p}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ for alle konstanter a (se *Big-O Notation* side 277 i læreboken).

Vi konkluderer oppgaven med å ha vist at

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} R(f,P,c) = 1.$$

Review Exercise 16, side 286

Vi lar $f(x) = \sin^2 x$. Taylor-polynomet av grad 6 til f om $x = 0$ er gitt som

$$P_6(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6.$$

Vi finner først de deriverte til f,

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sin^2 x, && f(0) = 0,\\
&f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x, && f'(0) = 0,\\
&f''(x) = 2\cos 2x, && f''(0) = 2,\\
&f^{(3)}(x) = -4\sin 2x, && f^{(3)}(0) = 0,\\
&f^{(4)}(x) = -8\cos 2x, && f^{(4)}(0) = -8,\\
&f^{(5)}(x) = 16\sin 2x, && f^{(5)}(0) = 0,\\
&f^{(6)}(x) = 32\cos 2x, && f^{(6)}(0) = 32.
\end{aligned}$$

Vi har nå at

$$P_6(x) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{8}{4!}x^4 + \frac{32}{6!}x^6 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6.$$

Fra Taylors teorem vet vi at

$$f(x) = P_6(x) + \mathcal{O}(x^7).$$

Vi bruker dette til å evaluere grensen,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{3\sin^2 x - 3x^2 + x^4}{x^6} &= \lim_{x\to 0} \frac{3\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6\right) + \mathcal{O}(x^7) - 3x^2 + x^4}{x^6}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{15}x^6 + \mathcal{O}(x^7)}{x^6}\\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{15} + \mathcal{O}(x)\right) = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$