3.5.30: Vi bruker derivasjonsregelen for $\cos^{-1} x$,

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

sammen med kjerneregelen for derivasjon. For å forenkle utregningen lar vi $u = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Vi regner først ut den deriverte til u,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{dx}\left(a(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = a\left(-\frac{1}{2}\right)(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}}{dx}(a^2+x^2) \\ &= -\frac{a}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,2x = -\frac{ax}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{ax}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}.\end{aligned}$$

Deretter finner vi den deriverte av y,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{dx}\cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+x^2}}}\left(-\frac{ax}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+x^2}}\cdot\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\frac{ax}{(a^2+x^2)} = \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2-a^2}(a^2+x^2)} = \frac{a}{a^2+x^2}.\end{aligned}$$

3.5.33: Vi begynner så med å derivere ligningen

$$\tan^{-1}\frac{2x}{y} = \frac{\pi x}{y^2} \tag{1}$$

på hver side, og får

$$2\cdot\frac{1}{1+\frac{4x^2}{y^2}}\cdot\frac{y-xy'}{y^2} = \pi\frac{y^2-2xyy'}{y^4}. \tag{2}$$

Vi setter inn $(x,y) = (1,2)$, og får (etter litt kansellering) ligningen

$$2-y'(1) = \pi(1-y'(1)), \tag{3}$$

som gir

$$y'(1) = \frac{\pi-2}{\pi-1}. \tag{4}$$

3.6.5: Vi bruker uttrykkene for de inverse av de hyperbolske funksjonene, side 202 i boka:

$$\begin{aligned}
\sinh^{-1} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\\
\cosh^{-1} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\\
\tanh^{-1} x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).
\end{aligned}$$

Ved hjelp av kjerneregelen for derivasjon får vi nå at

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{dx}\sinh^{-1} x &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x\right)\\
&= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}\\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}$$

Helt tilsvarende, man trenger bare bytte ut x^2+1 med x^2-1, er

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Hvis du ikke er helt overbevist om at dette er riktig, anbefaler vi at du går gjennom utregningene over på nytt.

For $\tanh^{-1} x$ får vi at

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{dx}\tanh^{-1} x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

Av Definisjon 8, side 149 i boka, følger det nå at

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} &= \sinh^{-1} x + C_1,\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} &= \cosh^{-1} x + C_2,\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} &= \tanh^{-1} x + C_3.
\end{aligned}$$

Vi har brukt ulike integrasjonskonstanter for å poengtere at disse ikke på noen måte er relatert.

4.1.16: Vi vet at avstanden s øker med $100\,\mathrm{km/t}$, det vil si at

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 100.$$

Vi er interessert i å finne farten til bilen, altså $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

Punktene A,C og P danner en rettvinklet trekant med sidelengder henholdsvis x, s og k. Av Pythagoras' læresetning følger det at

$$s^2 = k^2 + x^2.$$

Vi vet at k er konstant, og deriverer med hensyn på tiden t,

$$2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0 + 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{s}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Avstandene s og x er ukjente, så vi prøver å eliminere disse fra utrykket. Vi vet at vinkelen mellom laserpistolen og veien er 45°, slik at

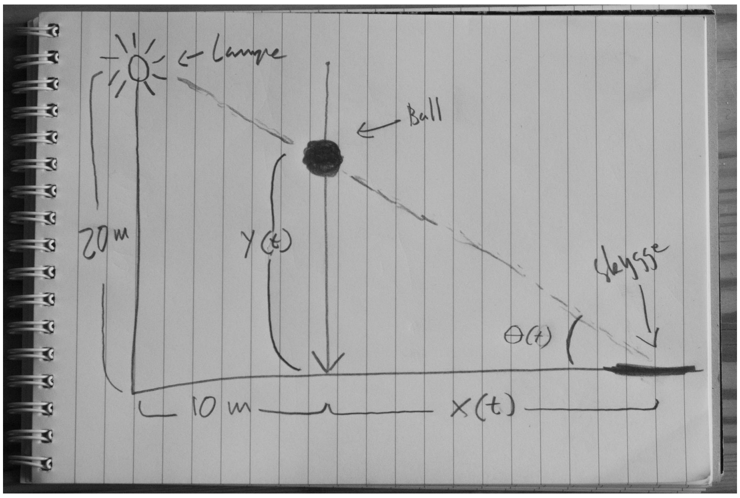
$$\frac{x}{s} = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vi kan nå løse for $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2}\cdot 100 \approx 141,4.$$

Det vil si at farten til bilen er omlag 141, 4 km/t.

4.1.40: La tiden t være gitt i sekunder, og la $a = 9.8\mathrm{m/s}^2$. Vi innfører tre funksjoner, $x(t)$, $y(t)$ og $\theta(t)$, se figur. Oppgaven spør etter $x'(1)$, og $x'(t_s)$.



Veiformlene fra fysikken forteller oss at

$$y(t) = 20 - \frac{1}{2}at^2 \tag{5}$$

Nå ser vi både at

$$\tan\theta = \frac{20}{10 + x(t)}, \tag{6}$$

og at

$$\tan\theta = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{20 - \frac{1}{2}at^2}{x(t)}, \tag{7}$$

så

$$\frac{40}{10 + x(t)} = \frac{40 - at^2}{x(t)}. \tag{8}$$

Snur vi denne på hodet, får vi

$$\frac{10 + x(t)}{40} = \frac{x(t)}{40 - at^2}, \tag{9}$$

og vi kan beregne

$$x(t) = \frac{400 - 10at^2}{at^2} = \frac{400}{at^2} - 10. \tag{10}$$

Hvis vi deriverer, får vi:

$$x'(t) = -\frac{800}{at^3}. \tag{11}$$

Når ballen har truffet bakken, er $y(t) = 0$, så vi kan beregne lett at for dette tidspunktet må $t = \sqrt{\frac{40}{a}}$. Vi setter til slutt in $t = 1$ og $t = \sqrt{\frac{40}{a}}$ i uttrykket for $x'(t)$, og får

$$x'(1) = -\frac{800}{a} \approx -81.63\text{m/s} \tag{12}$$

(her går det unna; skyggen starter jo på uendelig langt unna), og

$$x'\left(\sqrt{\frac{40}{a}}\right) = -\frac{800}{a \cdot \sqrt{\frac{40^3}{a^3}}} = -9.90\text{m/s} \tag{13}$$

Merk at fortegnene er negative, på grunn av vårt valg av koordinatsystem.

4.2.8: Vi setter $f(x) = x^2 - 3$. Da blir $f'(x) = 2x$, og iterasjonen blir

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} \tag{14}$$

Siden vi har en kamerat som er Norges nest fremste ubåtelektriker, husker vi at $\sqrt{3} \approx 1.7$, og vi tar derfor dette som vår kvalifiserte gjetning x_0. Bruk av iterasjonen over, gir tabellen

x_0 :	1.7
x_1 :	1.7323529411764707
x_2 :	1.7320508339159093
x_3 :	1.7320508075688774
x_4 :	1.7320508075688772
x_5 :	1.7320508075688774
x_6 :	1.7320508075688772

Det ser ut som om iterasjonene har stabilisert seg, og vi kan si at $\sqrt{3} \approx 1.732050807568877$. En vanlig laptop gjør, med mindre annet blir spesifisert, beregninger med 16 desimalers presisjon, og den siste desimalen får vi altså ikke informasjon om.

4.2.14: Vi prøver først å finne ut hvor mange løsninger som finnes. Observer at både $\cos x$ og x^2 er like funksjoner. Det følger at dersom x_1 er en løsning, det vil si at $\cos x_1 = x_1^2$, så er også $-x_1$ en løsning.

Videre vet vi at $x^2 > 1$ når $|x| > 1$, og at $\cos x \leq 1$ for alle x. Altså må alle løsninger ligge i intervallet $-1 \leq x \leq 1$.

La

$$f(x) = \cos x - x^2.$$

Vi ønsker å bestemme alle x slik at $f(x) = 0$. Vi har at

$$f'(x) = -\sin x - 2x.$$

Det vil si at $f(x) < 0$ for $x \in (0, 1]$, slik at $f(x)$ er synkende her. Altså kan det bare være en løsning på dette intervallet. Endepunktet på intervallet, $x = 0$, er åpenbart ikke riktig løsning.

Vi konkluderer analysen vår med at det finnes akkurat to løsninger, en i intervallet $(0, 1]$ og en i intervallet $[-1, 0)$.

Vi bruker så Newtons metode (side 224 i boka), til å bestemme roten i intervallet $(0, 1]$. I vårt eksempel får vi at

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n^2}{-\sin x_n - 2x_n} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n^2}{\sin x_n + 2x_n}.$$

Som startpunkt bruker vi midtpunktet, $x_0 = 0,5$, men andre punkter vil også fungere. Vi utfører første iterasjon, og får

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos x_0 - x_0^2}{\sin x_0 + 2x_0} = 0,5 + \frac{\cos 0,5 - 0,5^2}{\sin 0,5 + 2 \cdot 0,5} \approx 0,924206927293198 \approx 0,924.$$

Ved å iterere videre (husk å ta med alle desimaler i x_n når du regner ut x_{n+1}), får vi følgende resultat:

n	x_n	$f(x_n)$
0	0,500000000000000	$6,28 \cdot 10^{-01}$
1	0,924206927293198	$-2,52 \cdot 10^{-01}$
2	0,829105755997418	$-1,19 \cdot 10^{-02}$
3	0,824146131728195	$-3,29 \cdot 10^{-05}$
4	0,824132312409912	$-2,56 \cdot 10^{-10}$
5	0,824132312302522	$1,11 \cdot 10^{-16}$
6	0,824132312302522	$1,11 \cdot 10^{-16}$

Fem iterasjoner er altså nok for å nå maskinpresisjon ($\sim 10^{-16}$).

De to løsningene er $x = \pm\, 0,824132312302522$.

4.2.18: Vi skal finne maksimum og minimum for funksjonen

$$g(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}.$$

Sinus er en oscillerende funksjon mellom -1 og 1, så vi kan forvente mange lokale maksimum og minimum for $g(x)$. Samtidig er nevneren $1 + x^2$ monotont økende, slik at vi forventer at globalt maksimum må være det lokale maksimumet som ligger nærmest $x = 0$, og tilsvarende for det globale minimumet. Vi merker oss også at $g(x)$ er definert for alle $x \in \mathbb{R}$.

For å finne kandidater til maksimum og minimum, regner vi først ut den deriverte,

$$g'(x) = \frac{(1+x^2)\cos x - \sin x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}.$$

Vi ser at $g'(x) = 0$ når telleren er null. Vi ønsker altså å finne røtter til funksjonen

$$f(x) = (1+x^2)\cos x - 2x\sin x.$$

For å løse $f(x) = 0$ bruker vi Newtons metode,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Den deriverte til $f(x)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos x + (1+x^2)(-\sin x) - (2\sin x + 2x\cos x) \\ &= -(1+x^2)\sin x - 2\sin x = -(3+x^2)\sin x. \end{aligned}$$

På tilsvarende måte som i forrige oppgave itererer vi oss frem til løsningen. Merk at vi ikke kan velge $x_0 = 0$, siden $f'(0) = 0$. Vi velger derfor $x_0 = 1,0$ i første omgang (husk at vi vet at globalt maksimum og minimum ligger nært null).

n	x_n	$f(x_n)$
0	$1,0000000000000000$	$-6,02 \cdot 10^{-01}$
1	$0,8210463079671654$	$-6,09 \cdot 10^{-02}$
2	$0,7983816444825249$	$-9,50 \cdot 10^{-04}$
3	$0,7980170858066054$	$-2,45 \cdot 10^{-07}$
4	$0,7980169918423763$	$-1,60 \cdot 10^{-14}$
5	$0,7980169918423702$	$-2,22 \cdot 10^{-16}$

Deretter prøver vi $x_0 = -1,0$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	$-1,0000000000000000$	$-6,02 \cdot 10^{-01}$
1	$-0,8210463079671654$	$-6,09 \cdot 10^{-02}$
2	$-0,7983816444825249$	$-9,50 \cdot 10^{-04}$
3	$-0,7980170858066054$	$-2,45 \cdot 10^{-07}$
4	$-0,7980169918423763$	$-1,60 \cdot 10^{-14}$
5	$-0,7980169918423702$	$-2,22 \cdot 10^{-16}$

Vi evaluerer så g i disse to punktene:

$$g(0,7980169918423702) \approx 0,437,$$
$$g(-0,7980169918423702) \approx -0,437.$$

Vi konkluderer med at maksimum til g er $0,437$ og minimum er $-0,437$.

Det at minimumspunktet er lik minus maksimumspunktet, er ikke tilfeldig. Dette følger av at at $\sin x$ og $1+x^2$ er henholdsvis odde og like funksjoner, slik at også $g(x)$ er odde.