Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4100
Høst 2015

Løsningsforslag — Øving 4

2.1.10: At en funksjon er en til en, eller injektiv, betyr at

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b, \tag{1}$$

med andre ord er det kun en y-verdi per x-verdi. Vi tester dette for funksjonen

$$f(x) = \frac{1-2x}{1+x}; \tag{2}$$

anta at $a \neq b$, og at

$$\frac{1-2a}{1+a} = \frac{1-2b}{1+b}. \tag{3}$$

Vi ganger opp med nevnerne, og får

$$(1-2a)(1+b) = (1-2b)(1+a), \tag{4}$$

som ganget ut sier at $a = b$. Funksjonen er altså injektiv, eller en til en.

Vi finner nå $f^{-1}(x)$ ved å sette

$$y = \frac{1-2x}{1+x}, \tag{5}$$

og løse for y. Gang opp med $1+x$

$$y(1+x) = 1-2x, \tag{6}$$

samle x på den ene siden,

$$x(2+y) = 1-y, \tag{7}$$

og del på $2+y$, slik at

$$x = \frac{1-y}{2+y}. \tag{8}$$

Altså er den inverse funksjonen

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2+x}. \tag{9}$$

Domenene til disse funksjonene, er

$$D_f = \mathbb{R}/\{-1\} \tag{10}$$

og

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}/\{-2\}. \tag{11}$$

3.1.22: Vi starter med å derivere g,

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{hvis } x \geq 0, \\ x^{-\frac{2}{3}} & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

Vi vet at

$$x^{-\frac{2}{3}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 > 0$$

for alle x. Dermed kan vi konkludere med at $g'(x) \geq 0$ for alle x med $g'(x) = 0$ bare når $x = 0$. Ergo er g en injektiv funksjon.

For å finne g^{-1} ser vi først på tilfellet $x \geq 0$. Vi lar $y = g^{-1}(x)$ og finner at

$$x = g(y) = y^3 \quad \Rightarrow \quad y = x^{\frac{1}{3}}.$$

Vi vet at verdimengden til denne delen av g er $[0, \infty)$, slik at domenet til denne delen av g^{-1} også er $[0, \infty)$.

Videre ser vi på tilfellet $x < 0$. Vi lar $y = g^{-1}(x)$ og finner at

$$x = g(y) = y^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad y = x^3.$$

Vi vet at verdimengden til denne delen av g er $(-\infty, 0)$, slik at domenet til denne delen av g^{-1} også er $(-\infty, 0)$.

Oppsummert har vi at

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & \text{hvis } x \geq 0, \\ x^3 & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

3.1.28: Vi starter med å finne den deriverte til f,

$$f'(x) = 6x^2.$$

Vi ser at $f'(x) \geq 0$ for alle x med $f'(x) = 0$ bare når $x = 0$. Dette viser at f er injektiv og at den har en invers.

Vi finner så f^{-1} ved å la $y = f^{-1}(x)$ og løse for y,

$$x = f(y) = 1 + 2y^3 \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Det finnes nå to måter å regne ut $\left(f^{-1}\right)'(x)$ på, enten direkte eller via formelen side 169 i læreboken. Hvis vi bruker formelen får vi at

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{6\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{6\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Alternativt, hvis vi deriverer f^{-1} direkte ved hjelp av kjerneregelen for derivasjon, får vi

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

3.2.28: Vi lar $u = \log_b x$ og $v = \log_b a$. Via den inverse (Definisjon 5 side 172 i læreboken) vet vi at $x = b^u$ og $a = b^v$. Ved hjelp av den trivielle identiteten $b = (b^v)^{\frac{1}{v}}$ (husk at vi antar $b > 0$) har vi at

$$x = b^u = \left((b^v)^{\frac{1}{v}}\right)^u = \left(a^{\frac{1}{v}}\right)^u = a^{\frac{u}{v}}.$$

Ved å bruke definisjonen av den inverse til logaritmen igjen får vi at

$$\log_a x = \frac{u}{v} = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

3.3.6: Vi ser først på det første leddet. Ved å bruke Teorem 3, punkt (i), side 178 i læreboken og deretter at e og ln er inverse av hverandre slik at $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ (se nederst side 177 i læreboken), får vi at

$$\mathrm{e}^{2\ln\cos x} = \left(\mathrm{e}^{\ln\cos x}\right)^2 = (\cos x)^2.$$

På det andre leddet bruker vi også at e og ln er inverse av hverandre, men nå slik at $\ln \mathrm{e}^x = x$. Da får vi at

$$\left(\ln \mathrm{e}^{\sin x}\right)^2 = (\sin x)^2.$$

Hvis vi summerer de to leddene står igjen med

$$\mathrm{e}^{2\ln\cos x} + \left(\ln \mathrm{e}^{\sin x}\right)^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

3.3.46: Vi deriverer uttrykket ved gjentatt bruk av kjerneregelen for derivasjon. Husk at $\frac{\mathrm{d}}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$, $\frac{\mathrm{d}}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og $\frac{\mathrm{d}}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{dx}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| \\
&= \frac{1}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\frac{\mathrm{d}}{dx}|x+\sqrt{x^2-a^2}| \\
&= \frac{1}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) \\
&= \frac{1}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}\frac{\mathrm{d}}{dx}(x^2-a^2)\right) \\
&= \frac{1}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}2x\right).
\end{aligned}$$

Vi bruker så at $|b||b| = b^2$ for et vilkårlig tall b. I vårt tilfelle kan vi sette $b = x + \sqrt{x^2 - a^2}$, slik at vi får

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)^2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right) \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{x\sqrt{x^2 - a^2} + x^2 - a^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2}\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}.\end{aligned}$$

3.4.25: La $T(t)$ være termometerets temperatur som funksjon av tiden. Newtons avkjølingslov sier at

$$T' = k(T - 20), \tag{12}$$

siden temperaturen i rommet er 20 grader. Vi har også fått vite at $T(0) = 72$, og at $T(1) = 48$. Løsningen av 12 er (se eksempel på s. 186 i boken)

$$T = 52\mathrm{e}^{kt} + 20. \tag{13}$$

Siden $T(1) = 48$, får vi at

$$T(1) = 52\mathrm{e}^{k} + 20 = 48, \tag{14}$$

som gir

$$k = \ln\frac{28}{52} = \ln\frac{7}{13} \tag{15}$$

Altså er

$$T = 52\mathrm{e}^{\ln(\frac{7}{13})t} + 20 = 52(\frac{7}{13})^t + 20, \tag{16}$$

så vi kan beregne

$$T(5) = 52(\frac{7}{13})^5 + 20 \approx \tag{17}$$

Fra Maple T.A., test 2: Oppgaven er å finne k slik at $y - 25x = k$ er en normal til kurven

$$f(x) = \frac{1}{|x - 2|}. \tag{18}$$

Vi begynner med å skrive ligningen for normalen på standardform,

$$y = 25x + k. \tag{19}$$

Da ser vi at stigningstallet må være 25, og følgelig vil stigningstallet til tangenten i dette punktet (se læreboken, s. 99) være $\frac{-1}{25}$. Vi må først finne ut hvor funksjonen har dette stigningstallet. Funksjoner med absoluttverditegn, er lettest å skrive om til dobbel forskrift:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{for } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2} & \text{for } x > 2 \end{cases} \tag{20}$$

Nå kan vi bare derivere delene hver for seg, og få

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{for } x < 2 \\ \frac{-1}{(x-2)^2} & \text{for } x > 2 \end{cases} \tag{21}$$

Siden den nederste biten alltid har negativt stigningstall, og den øverste alltid har positivt, ser vi at

$$f'(x) = \frac{-1}{25} \quad \Longrightarrow \quad x = 7. \tag{22}$$

Siden

$$f(7) = \frac{1}{5}, \tag{23}$$

og normallinjen som etterspørres jo må passere gjennom dette punktet, kan vi beregne k ved å sette inn koordinatene $(7, \frac{1}{5})$ i ligningen for normalen:

$$k = \frac{1}{5} - 25 \cdot 7 = -\frac{874}{5} \tag{24}$$