Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 3

2.7.22: Økningen i fluksen, F, kan approksimeres som (se side 131 i læreboken)

$$\Delta F \approx \mathrm{d}F = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = 4kr^3\mathrm{d}r.$$

Relativ økning i F kan videre approksimeres med

$$\frac{\Delta F}{F} \approx \frac{4kr^3\mathrm{d}r}{kr^4} = \frac{4}{r}\mathrm{d}r.$$

Vi er ute etter relativ økning i radius, r, det vil si

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{\mathrm{d}r}{r} \approx \frac{1}{4}\frac{\Delta F}{F}.$$

Relativ økning i rate skal være 10%, altså $\frac{\Delta F}{F} = 0,10$. Dette gir

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{1}{4} \cdot 0,10 = 0,025.$$

Altså må radius øke med omlag $2,5\%$ for at raten skal øke med 10%.

La oss avslutte med et talleksempel. La $k = 1$ og $r_1 = 1$. Da er $F_1 = kr_1^4 = 1$. Vi øker r med $2,5\%$ til $r_2 = 1,025$. Da er $F_2 = kr_2^4 = 1,1038$, altså en økning på $10,38\%$. Vår approksimasjon er altså ganske god.

2.8.15: Vi deriverer funksjonen, og får

$$f'(x) = 4x(x^2 - 4) = 4x(x-2)(x+2). \tag{1}$$

Denne funksjonen har nullpunkter i $x = -2$, $x = 0$ og $x = 2$, og en enkel inspeksjon forteller oss at $f'(x) \leq 0$ når $x \leq -2$ eller $0 \leq x \leq 2$, mens $f'(x) \geq 0$ når $-2 \leq x \leq 0$ eller $x \geq 2$. Følgelig synker funksjonen hvis $x \leq -2$ eller $0 \leq x \leq 2$, mens den stiger hvis $-2 \leq x \leq 0$ eller $x \geq 2$.

2.8.22: Funksjonene f og g er i følge antakelsene i den generaliserte middelverdisetningen (*The Generalized Mean-Value Theorem*) både kontinuerlige på $[a, b]$ og deriverbare på (a, b).

De oppfyller derfor antakelsene i middelverdisetningen (*Mean-Value theorem*). Derfor er det riktig å si at

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

for en c mellom a og b.

Tilsvarende kan man si at

$$g(b) - g(a) = (b - a)g'(\tilde{c})$$

for en $\tilde{c}$ mellom a og b. *Men*: Vi må anta forskjellig punkt c i de to tilfellene. Derfor har vi her brukt $\tilde{c}$ når vi anvender middelverdisetningen på g. Det er her beviset i oppgaven feiler, fordi man der antar $c = \tilde{c}$.

Dersom vi skulle følge fremgangsmåten presentert i oppgaven vil vi ende opp med følgende resultat. Det finnes punkter c og $\tilde{c}$, begge mellom a og b, slik at

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(\tilde{c})}.$$

2.9.7: Først deriverer vi med hensyn på x på begge sider, og får

$$\frac{(1 - y')(x + y) - (1 + y')(x - y)}{(x + y)^2} = \frac{2xy - x^2 y'}{y^2}, \tag{2}$$

eller

$$\frac{2(y - xy')}{(x + y)^2} = \frac{x(2y - xy')}{y^2}. \tag{3}$$

Nå samler vi alt som er ganget med y' på den ene siden, og får

$$\frac{x^2 y'}{y^2} - \frac{2xy'}{(x + y)^2} = \frac{2xy}{y^2} - \frac{2y}{(x + y)^2}. \tag{4}$$

eller

$$y' \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{2x}{(x + y)^2} \right) = \frac{2xy}{y^2} - \frac{2y}{(x + y)^2}, \tag{5}$$

slik at

$$y' = \frac{\frac{2xy}{y^2} - \frac{2y}{(x+y)^2}}{\frac{x^2}{y^2} - \frac{2x}{(x+y)^2}} = \frac{2xy(x + y)^2 - 2y^3}{x^2(x + y)^2 - 2xy^2} = \tag{6}$$

$$= \frac{2xy(x + y)^2 - 2y^3}{x^2(x + y)^2 - 2xy^2}. \tag{7}$$

2.9.12: Ligningen for tangentlinjen til en kurve i et gitt punkt (x_0, y_0), er gitt som

$$y = m(x - x_0) + y_0.$$

Stigningstallet, m, er gitt som den deriverte av y med hensyn på x i punktet (x_0, y_0). Dette kan skrives som

$$m = \left. \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}.$$

Den oppgitte kurven lar seg ikke skrive på eksplisitt form. Derfor deriverer vi implisitt.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{dx}(x+2y+1) &= \frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\frac{y^2}{x-1}\right) \\
\frac{\mathrm{d}}{dx}(x) + \frac{\mathrm{d}}{dx}(2y) + \frac{\mathrm{d}}{dx}(1) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{dx}(y^2)(x-1) - y^2\frac{\mathrm{d}}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} \\
1 + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 0 &= \frac{2y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y)(x-1) - y^2(1-0)}{(x-1)^2} \\
1 + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x-1) - y^2}{(x-1)^2}.
\end{aligned}
$$

Vær spesielt oppmerksom på derivasjonen av y^2. Her må vi behandle y som en kjerne siden vi deriverer med hensyn på x, slik at vi får $\frac{\mathrm{d}}{dx}(y^2) = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (og ikke bare $2y$).

Dersom vi hadde ønsket å finne $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ uttrykt ved x og y, måtte vi nå ha løst dette uttrykket for $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Deretter kunne vi ha funnet m ved å sette inn for $(x, y) = (2, -1)$. Men siden vi kun er interessert i $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ i dette punktet, kan vi sette inn for x og y før vi løser for $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Dette gir

$$
\begin{aligned}
1 + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2(-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(2-1) - (-1)^2}{(2-1)^2} \\
1 + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 1 \\
4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Dette er nå den deriverte i punktet $(2, -1)$, så for å være helt nøyaktige bør vi skrive

$$
m = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = -\frac{1}{2}.
$$

Vi er nå klare til å sette opp ligningen for tangentlinjen til kurven i punktet $(2, -1)$,

$$
y = -\frac{1}{2}(x-2) - 1 = -\frac{1}{2}x.
$$

2.9.28: Vi starter med å finne skjæringspunktene mellom ellipsen og hyperbelen. Hvis vi løser ligningen for ellipsen med hensyn på y^2 får vi

$$
y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).
$$

Vi setter dette inn i ligningen for hyperbelen og løser med hensyn på x^2,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) &= 1 \\
x^2\left(\frac{1}{A^2} + \frac{b^2}{a^2B^2}\right) &= 1 + \frac{b^2}{B^2} \\
x^2(a^2B^2 + b^2A^2) &= A^2a^2B^2 + b^2A^2a^2 \\
x^2 &= \frac{A^2a^2B^2 + b^2A^2a^2}{a^2B^2 + b^2A^2} = \frac{A^2a^2(B^2 + b^2)}{a^2B^2 + b^2A^2}.
\end{aligned}$$

Observer nå at $x^2 \geq 0$ for alle a, b, A og B. Det må vi også kreve for at ligningen skal ha en løsning (vi kan ikke ta kvadratroten av noe negativt).

Vi setter så inn uttrykket for x^2 inn i uttrykket for y^2 og får at

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{A^2(B^2 + b^2)}{a^2B^2 + b^2A^2}\right) = b^2\left(\frac{a^2B^2 + b^2A^2 - A^2B^2 - A^2b^2}{a^2B^2 + b^2A^2}\right) = \frac{b^2B^2(a^2 - A^2)}{a^2B^2 + b^2A^2}.$$

Tilsvarende som i sted, må vi kreve at $y^2 \geq 0$ for at vi skal ha en løsning. Vi ser at nevneren er positiv for alle a, b, A og B, mens vi må kreve at $a^2 \geq A^2$ for at telleren skal være positiv. Antakelsen fra oppgaven om at $a^2 \geq A^2$ er altså nødvendig for å sikre oss at vi faktisk har løsninger, det vil si at kurvene skjærer hverandre.

Det neste steget er å finne uttrykk for stigningstallet til tangentlinjene til de to kurvene. Stigningstallet er som vi husker lik $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Ingen av kurvene er gitt på eksplisitt form, så vi deriverer implisitt. Vi starter med ellipsen,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{dx}(1) \\
\frac{2x}{a^2} + \frac{2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{b^2} &= 0 \\
\frac{b^2}{a^2}x + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.
\end{aligned}$$

For hyperbelen får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{dx}(1) \\
\frac{2x}{A^2} - \frac{2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{B^2} &= 0 \\
\frac{B^2}{A^2}x - y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{B^2}{A^2}\frac{x}{y}.
\end{aligned}$$

La $m_e = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$ være stigningstallet til tangentlinjen til ellipsen, og $m_h = \frac{B^2}{A^2}\frac{x}{y}$ være stigningstallet til tangentlinjen til hyperbelen. For at de to tangentlinjene skal stå normalt på hverandre må vi ha at (se side 99 i læreboken)

$$m_e = -\frac{1}{m_h}.$$

Satt inn for m_e og m_h får vi

$$\begin{aligned} -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} &= -\frac{A^2}{B^2}\frac{y}{x} \\ \frac{b^2}{a^2}x^2 &= \frac{A^2}{B^2}y^2. \end{aligned}$$

Vi setter nå inn uttrykkene for x^2 og y^2 som beskriver skjæringspunktene, for å sjekke om ligningen ovenfor er tilfredstillt i disse punktene.

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{A^2a^2(B^2+b^2)}{a^2B^2+b^2A^2} = \frac{A^2}{B^2}\frac{b^2B^2(a^2-A^2)}{a^2B^2+b^2A^2}.$$

Vi stryker alle like faktorer og står igjen med

$$B^2 + b^2 = a^2 - A^2$$

eller

$$a^2 - b^2 = A^2 + B^2.$$

Dette er lik den andre antakelsen i oppgaven, og vi har vist at tangentlinjene til kurvene i skjæringspunktene står normalt på hverandre.

2.10.7: Siden

$$\tan x \cos x = \sin x, \tag{8}$$

får vi

$$\int \tan x \cos x \mathrm{d}x = -\cos x + C. \tag{9}$$