



2.7.22: Økningen i fluksen, F , kan approksimeres som (se side 131 i læreboken)

$$\Delta F \approx dF = \frac{dF}{dr} dr = 4kr^3 dr.$$

Relativ økning i F kan videre approksimeres med

$$\frac{\Delta F}{F} \approx \frac{4kr^3 dr}{kr^4} = \frac{4}{r} dr.$$

Vi er ute etter relativ økning i radius, r , det vil si

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{dr}{r} \approx \frac{1}{4} \frac{\Delta F}{F}.$$

Relativ økning i rate skal være 10%, altså $\frac{\Delta F}{F} = 0,10$. Dette gir

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{1}{4} \cdot 0,10 = 0,025.$$

Altså må radius øke med omlag 2,5% for at raten skal øke med 10%.

La oss avslutte med et talleksempel. La $k = 1$ og $r_1 = 1$. Da er $F_1 = kr_1^4 = 1$. Vi øker r med 2,5% til $r_2 = 1,025$. Da er $F_2 = kr_2^4 = 1,1038$, altså en økning på 10,38%. Vår approksimasjon er altså ganske god.

2.8.15: Vi deriverer funksjonen, og får

$$f'(x) = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2). \quad (1)$$

Denne funksjonen har nullpunkter i $x = -2$, $x = 0$ og $x = 2$, og en enkel inspeksjon forteller oss at $f'(x) \leq 0$ når $x \leq -2$ eller $0 \leq x \leq 2$, mens $f'(x) \geq 0$ når $-2 \leq x \leq 0$ eller $x \geq 2$. Følgelig stiger funksjonen hvis $x \leq -2$ eller $0 \leq x \leq 2$, mens den synker hvis $-2 \leq x \leq 0$ eller $x \geq 2$.

2.8.22: Funksjonene f og g er i følge antakelsene i den generaliserte middelverdisetningen (*The Generalized Mean-Value Theorem*) både kontinuerlige på $[a, b]$ og deriverbare på (a, b) .

De oppfyller derfor antakelsene i middelverdisetningen (*Mean-Value theorem*). Derfor er det riktig å si at

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

for en c mellom a og b .

Tilsvarende kan man si at

$$g(b) - g(a) = (b - a)g'(\tilde{c})$$

for en \tilde{c} mellom a og b . *Men:* Vi må anta forskjellig punkt c i de to tilfellene. Derfor har vi her brukt \tilde{c} når vi anvender middelverdisetningen på g . Det er her beviset i oppgaven feiler, fordi man der antar $c = \tilde{c}$.

Dersom vi skulle følge fremgangsmåten presentert i oppgaven vil vi ende opp med følgende resultat. Det finnes punkter c og \tilde{c} , begge mellom a og b , slik at

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(\tilde{c})}.$$

2.9.7: Først deriverer vi med hensyn på x på begge sider, og får

$$\frac{(1 - y')(x + y) - (1 + y')(x - y)}{(x + y)^2} = \frac{2xy - x^2y'}{y^2}, \quad (2)$$

eller

$$\frac{2(y - xy')}{(x + y)^2} = \frac{x(2y - xy')}{y^2}. \quad (3)$$

Nå samler vi alt som er ganget med y' på den ene siden, og får

$$\frac{x^2y'}{y^2} - \frac{2xy'}{(x + y)^2} = \frac{2xy}{y^2} - \frac{2y}{(x + y)^2}. \quad (4)$$

eller

$$y' \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{2x}{(x + y)^2} \right) = \frac{2xy}{y^2} - \frac{2y}{(x + y)^2}, \quad (5)$$

slik at

$$y' = \frac{\frac{2xy}{y^2} - \frac{2y}{(x+y)^2}}{\frac{x^2}{y^2} - \frac{2x}{(x+y)^2}} = \frac{2xy(x + y)^2 - 2y^3}{x^2(x + y)^2 - 2xy^2}. \quad (6)$$

2.9.12: Ligningen for tangentlinjen til en kurve i et gitt punkt (x_0, y_0) , er gitt som

$$y = m(x - x_0) + y_0.$$

Stigningstallet, m , er gitt som den deriverte av y med hensyn på x i punktet (x_0, y_0) . Dette kan skrives som

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}.$$

Den oppgitte kurven lar seg ikke skrive på eksplisitt form. Derfor deriverer vi implisitt.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x + 2y + 1) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{y^2}{x-1} \right) \\ \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2y) + \frac{d}{dx}(1) &= \frac{\frac{d}{dx}(y^2)(x-1) - y^2 \frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} \\ 1 + 2 \frac{dy}{dx} + 0 &= \frac{2y \frac{d}{dx}(y)(x-1) - y^2(1-0)}{(x-1)^2} \\ 1 + 2 \frac{dy}{dx} &= \frac{2y \frac{dy}{dx}(x-1) - y^2}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

Vær spesielt oppmerksom på derivasjonen av y^2 . Her må vi behandle y som en kjerne siden vi deriverer med hensyn på x , slik at vi får $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y \frac{dy}{dx}$ (og ikke bare $2y$).

Dersom vi hadde ønsket å finne $\frac{dy}{dx}$ uttrykt ved x og y , måtte vi nå ha løst dette uttrykket for $\frac{dy}{dx}$. Deretter kunne vi ha funnet m ved å sette inn for $(x, y) = (2, -1)$. Men siden vi kun er interessert i $\frac{dy}{dx}$ i dette punktet, kan vi sette inn for x og y før vi løser for $\frac{dy}{dx}$. Dette gir

$$\begin{aligned}1 + 2 \frac{dy}{dx} &= \frac{2(-1) \frac{dy}{dx}(2-1) - (-1)^2}{(2-1)^2} \\ 1 + 2 \frac{dy}{dx} &= -2 \frac{dy}{dx} - 1 \\ 4 \frac{dy}{dx} &= -2 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dette er nå den deriverte i punktet $(2, -1)$, så for å være helt nøyaktige bør vi skrive

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = -\frac{1}{2}.$$

Vi er nå klare til å sette opp ligningen for tangentlinjen til kurven i punktet $(2, -1)$,

$$y = -\frac{1}{2}(x - 2) - 1 = -\frac{1}{2}x.$$

2.9.28: Vi starter med å finne skjæringspunktene mellom ellipsen og hyperbelen. Hvis vi løser ligningen for ellipsen med hensyn på y^2 får vi

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Vi setter dette inn i ligningen for hyperbelen og løser med hensyn på x^2 ,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) &= 1 \\ x^2 \left(\frac{1}{A^2} + \frac{b^2}{a^2 B^2}\right) &= 1 + \frac{b^2}{B^2} \\ x^2(a^2 B^2 + b^2 A^2) &= A^2 a^2 B^2 + b^2 A^2 a^2 \\ x^2 &= \frac{A^2 a^2 B^2 + b^2 A^2 a^2}{a^2 B^2 + b^2 A^2} = \frac{A^2 a^2 (B^2 + b^2)}{a^2 B^2 + b^2 A^2}.\end{aligned}$$

Observer nå at $x^2 \geq 0$ for alle a, b, A og B . Det må vi også kreve for at ligningen skal ha en løsning (vi kan ikke ta kvadratroten av noe negativt).

Vi setter så inn uttrykket for x^2 inn i uttrykket for y^2 og får at

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{A^2(B^2 + b^2)}{a^2 B^2 + b^2 A^2}\right) = b^2 \left(\frac{a^2 B^2 + b^2 A^2 - A^2 B^2 - A^2 b^2}{a^2 B^2 + b^2 A^2}\right) = \frac{b^2 B^2 (a^2 - A^2)}{a^2 B^2 + b^2 A^2}.$$

Tilsvarende som i sted, må vi kreve at $y^2 \geq 0$ for at vi skal ha en løsning. Vi ser at nevneren er positiv for alle a, b, A og B , mens vi må kreve at $a^2 \geq A^2$ for at telleren skal være positiv. Antakelsen fra oppgaven om at $a^2 \geq A^2$ er altså nødvendig for å sikre oss at vi faktisk har løsninger, det vil si at kurvene skjærer hverandre.

Det neste steget er å finne uttrykk for stigningstallet til tangentlinjene til de to kurvene. Stigningstallet er som vi husker lik $\frac{dy}{dx}$. Ingen av kurvene er gitt på eksplisitt form, så vi deriverer implisitt. Vi starter med ellipsen,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) &= \frac{d}{dx}(1) \\ \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{b^2}{a^2} x + y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{b^2 x}{a^2 y}.\end{aligned}$$

For hyperbelen får vi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2}\right) &= \frac{d}{dx}(1) \\ \frac{2x}{A^2} - \frac{2y}{B^2} \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{B^2}{A^2} x - y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{B^2 x}{A^2 y}.\end{aligned}$$

La $m_e = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ være stigningstallet til tangentlinjen til ellipsen, og $m_h = \frac{B^2 x}{A^2 y}$ være stigningstallet til tangentlinjen til hyperbelen. For at de to tangentlinjene skal stå normalt

på hverandre må vi ha at (se side 99 i læreboken)

$$m_e = -\frac{1}{m_h}.$$

Satt inn for m_e og m_h får vi

$$\begin{aligned} -\frac{b^2 x}{a^2 y} &= -\frac{A^2 y}{B^2 x} \\ \frac{b^2}{a^2} x^2 &= \frac{A^2}{B^2} y^2. \end{aligned}$$

Vi setter nå inn uttrykkene for x^2 og y^2 som beskriver skjæringspunktene, for å sjekke om ligningen ovenfor er tilfredstillt i disse punktene.

$$\frac{b^2}{a^2} \frac{A^2 a^2 (B^2 + b^2)}{a^2 B^2 + b^2 A^2} = \frac{A^2 b^2 B^2 (a^2 - A^2)}{B^2 a^2 B^2 + b^2 A^2}.$$

Vi stryker alle like faktorer og står igjen med

$$B^2 + b^2 = a^2 - A^2$$

eller

$$a^2 - b^2 = A^2 + B^2.$$

Dette er lik den andre antakelsen i oppgaven, og vi har vist at tangentlinjene til kurvene i skjæringspunktene står normalt på hverandre.

2.10.7: Siden

$$\tan x \cos x = \sin x, \tag{7}$$

får vi

$$\int \tan x \cos x dx = -\cos x + C. \tag{8}$$