TMA4100
Høst 2015

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 2

2.1.10: Vi bruker definisjonen for ikke-vertikale tangentlinjer (side 97 i læreboken). Tangentlinjen gjennom et punkt (x_0, y_0) er gitt ved

$$y = m(x - x_0) + y_0.$$

I vårt tilfelle er $x_0 = 1$ og $y_0 = \sqrt{5 - 1^2} = 2$. Stigningstallet m til tangentlinja i et vilkårlig punkt er gitt ved

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5-(x+h)^2} - \sqrt{5-x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{5-(x+h)^2} - \sqrt{5-x^2}\right)\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)}{h\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(5-(x+h)^2\right) - \left(5-x^2\right)}{h\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5 - x^2 - 2hx - h^2 - 5 + x^2}{h\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2 - 2hx}{h\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h - 2x}{\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= -\frac{\lim_{h\to 0} h + 2x}{\lim_{h\to 0}\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)}.
\end{aligned}$$

I det første steget har vi brukt metoden med å multiplisere teller og nevner med den konjugerte til telleren. I det siste steget har vi brukt Teorem 2, punkt 5, side 69 i læreboken.

Når $h \to 0$ har vi nå at telleren går mot $2x$ og nevneren går mot $2\sqrt{5 - x^2}$. Dette gir

$$m = \frac{-2x}{\sqrt{5-x^2} + \sqrt{5-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}.$$

Ved å sette $x = 1$, får vi $m = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$.

Tangentkurven blir nå

$$y = -\frac{1}{2}(x-1) + 2 = \frac{1}{2}(5-x).$$

Observasjon: Vi kunne ha satt inn for $x = 1$ allerede fra starten av når vi regner ut m. Det ville gitt noe enklere regning, men vi har her valgt å vise hvordan dette kan gjøres mer generelt. Merk også at uttrykket vi får for m er lik den deriverte av kurven vi ser på. Merk også at stigningstallet kan finnes mye enklere ved å derivere funksjonen og sette inn $x = 1$, men her var det meningen å bruke definisjonen av tangent.

2.2.27: Funksjonen

$$f(x) = |x^2 + 3x + 2| \tag{1}$$

har nullpunkter i $x = -1$ og $x = -2$, og den er ikke deriverbar i disse punktene. For $x = -1$ er grunnen at

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -1 \neq 1 = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}. \tag{2}$$

Forklaringen for punktet $x = 2$ er identisk. (Hint: det kan være lurt å tegne funksjonen.)

2.2.54: Vi skal vise at $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$, der $r = \frac{1}{n}$ og n er et positivt heltall. Vi bruker definisjonen på den deriverte (side 100 i læreboken) og det oppgitte hintet. Da har vi at

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{\left((x+h)^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n}
\end{aligned}$$

Videre bruker vi formelen for faktorisering av differansen mellom uttrykk i n'te potens (side 103 i læreboken):

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Dersom vi setter $a = (x+h)^{\frac{1}{n}}$ og $b = x^{\frac{1}{n}}$ kan vi skrive om nevneren vår til:

$$\begin{aligned}
\left((x+h)^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left[(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}\right] \Big[&\left((x+h)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \\
&+ \left((x+h)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} x^{\frac{1}{n}} \\
&+ \left((x+h)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-3} x^{\frac{2}{n}} \\
&+ \ldots \\
&+ \left((x+h)^{\frac{1}{n}}\right) x^{\frac{n-2}{n}} \\
&+ x^{\frac{n-1}{n}} \Big].
\end{aligned}$$

Den første faktoren, $\left[(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}\right]$, kanselleres mot telleren i grensen vår. For den andre faktoren kan vi la $h \to 0$, og vi står igjen med

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} x^{\frac{1}{n}} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-3} x^{\frac{2}{n}} + \ldots + \left(x^{\frac{1}{n}}\right) x^{\frac{n-2}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}}} \\
&= \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}+\frac{1}{n}} + x^{\frac{n-3}{n}+\frac{2}{n}} + \ldots + x^{\frac{1}{n}+\frac{n-2}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}}} \\
&= \frac{1}{\underbrace{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}} + \ldots + x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}}}_{n \text{ ledd}}} \\
&= \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = rx^{r-1}.
\end{aligned}$$

2.3.30: Vi starter med å derivere telleren,

$$\frac{d}{dx}(x^2+1)(x^3+2) = 2x(x^3+2) + (x^2+1)3x^2 = 5x^4 + 3x^2 + 4x.$$

Deretter nevneren,

$$\frac{d}{dx}(x^2+2)(x^3+1) = 2x(x^3+1) + (x^2+2)3x^2 = 5x^4 + 6x^2 + 2x.$$

Ved å bruke kvotientregelen på hele uttrykket får vi nå at

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^2+1)(x^3+2)}{(x^2+2)(x^3+1)}\right) \\
&\quad = \frac{(x^2+2)(x^3+1)(5x^4+3x^2+4x) - (x^2+1)(x^3+2)(5x^4+6x^2+2x)}{(x^2+2)^2(x^3+1)^2}
\end{aligned}$$

Ved å løse ut parentesene og trekke sammen kommer man fram til det endelige svaret,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^2+1)(x^3+2)}{(x^2+2)(x^3+1)}\right) = \frac{2x^7 - 3x^6 - 3x^4 - 6x^2 + 4x}{(x^2+2)^2(x^3+1)^2}.$$

2.3.40: Vi starter med å derivere uttrykket ved hjelp av produktregelen for n faktorer (side 112 i læreboken), her med $n = 4$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big((1+t)(1+2t)(1+3t)(1+4t)\Big) =&1(1+2t)(1+3t)(1+4t) \\
&+ (1+t)2(1+3t)(1+4t) \\
&+ (1+t)(1+2t)3(1+4t) \\
&+ (1+t)(1+2t)(1+3t)4.
\end{aligned}$$

Vi setter deretter inn for $t = 0$ og får at

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big((1+t)(1+2t)(1+3t)(1+4t)\Big)\Big|_{t=0} \\ &= 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\cdot 4 \\ &= 1+2+3+4 = 10.\end{aligned}$$

2.4.9: Her er det lurt å skrive om funksjonen til dobbel forskrift:

$$f(x) = |1-x^2| = \begin{cases} x^2-1 & \text{hvis } x < -1 \text{ eller } x \geq 1 \\ 1-x^2 & \text{hvis } -1 \leq x < 1 \end{cases} \tag{3}$$

Nå er det bare å derivere disse delene hver for seg, og vi får

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{hvis } x < -1 \text{ eller } x > 1 \\ -2x & \text{hvis } -1 < x < 1 \end{cases} \tag{4}$$

Merk at $f'(x)$ ikke er definert i $x = \pm 1$; dette fremgår av ulikhetene i uttrykket.

2.5.21: Vi beregner

$$\frac{d}{dx}(\sin 2x - \cos 2x) = 2\left(\cos 2x + \sin 2x\right). \tag{5}$$

2.6.13: Formelen er

$$\frac{d}{dx^n}\frac{1}{x} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \tag{6}$$

Hvis $n = 1$, er

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{-1}{x^2} \tag{7}$$

som er den korrekte deriverte, og vi ser at formelen stemmer. Anta så at formelen stemmer for $n = k-1$. I så fall er

$$\frac{d}{dx^k}\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx^{k-1}}\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}. \tag{8}$$

Dette medfører at dersom formelen stemmer for $n = k-1$, stemmer den også for $n = k$, og induksjonsargumentet er fullført. Formelen gjelder for alle n.