TMA4100
Høst 2015

Løsningsforslag — Øving 1

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

1.2.30: Man ser at $(x+1)$ helt klart er en faktor i (x^3+1) Husker du polynomdivisjon?

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2-x+1)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x^2-x+1)=1. \tag{1}$$

1.2.74: Siden

$$\lim_{x\to0}\sqrt{5-2x^2}=\lim_{x\to0}\sqrt{5-x^2}=\sqrt{5}, \tag{2}$$

gir skviseteoremet at

$$\lim_{x\to0}f(x)=\sqrt{5}. \tag{3}$$

1.3.8: Vi beregner

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{2\,x-1}{\sqrt{3\,x^2+x+1}}&=\lim_{x\to\infty}\frac{x\,(2-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

1.3.20: Gang oppe og nede med konjugatuttrykket, se s. 75 i 'Adams & Essex, Calculus, 8th edition', og regn ut

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2\,x}-\sqrt{x^2-2\,x})\\&\quad=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2\,x}-\sqrt{x^2-2\,x})\,(\sqrt{x^2+2\,x}+\sqrt{x^2-2\,x})}{\sqrt{x^2+2\,x}+\sqrt{x^2-2\,x}}\\&\quad=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2\,x-x^2+2\,x}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}+\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x})}}\\&\quad=\lim_{x\to\infty}\frac{4\,x}{x(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}})}\\&\quad=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=2.\end{aligned}$$

1.4.19: På intervallet $-1 < x < 1$ antar funksjonen x^2 verdien $f(x) = 0$ i $x = 0$. Dette er den minste verdien funksjonen antar på intervallet, og er følgelig en minimumsverdi. Funksjonen har derimot ingen maksimumsverdi, for den har ingen maksimumsverdier på det indre av intervallet, og, intervallet er åpent.

1.5.5: Vi krever

$$|\sqrt{x} - 1| < 0.1. \tag{4}$$

Dette er ekvivalent med

$$-0.1 < \sqrt{x} - 1 < 0.1, \tag{5}$$

eller

$$0.9 < \sqrt{x} < 0.1. \tag{6}$$

Hvis vi kvadrerer overalt, får vi

$$0.9^2 < x < 1.1^2, \tag{7}$$

eller

$$0.81 < x < 1.21. \tag{8}$$

1.5.12: La $\epsilon > 0$ være gitt. Vi ønsker å finne $\delta > 0$ slik at $|x-2| < \delta$ medfører $|5-2\,x-1| < \epsilon$. Vi har

$$\begin{array}{ccccc} -\epsilon & < & 4-2\,x & < & \epsilon \\ -4-\epsilon & < & -2\,x & < & -4+\epsilon\,. \end{array}$$

Hvis vi multipliserer alt med -1, får vi

$$\begin{array}{ccccc} 4-\epsilon & < & 2\,x & < & 4+\epsilon \\ 2-\frac{\epsilon}{2} & < & x & < & 2+\frac{\epsilon}{2}\,. \end{array}$$

Nå ser vi at vi kan velge $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Da impliserer $|x-2| < \frac{\epsilon}{2}$ at $|5-2\,x-1| < \epsilon$. Ved definisjonen av grenseverdi (s. 89 i læreboken), har vi at $L = 1$ er grensen til $f(x) = 5-2\,x$ nå x går mot $a = 1$.

1.5.18: Som forrige oppgave, gitt $\epsilon > 0$, ønsker vi å sjekke om det finnes en $\delta > 0$ slik at $|x-a| < \delta$ medfører $|f(x) - L| < \epsilon$. I denne oppgaven har vi at

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}, \quad a = -1, \quad L = -\frac{1}{2}\,.$$

Vi starter med ulikheten for $f(x)$, og prøver å finne δ:

$$\left|\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{1}{2}\right| < \epsilon\,.$$

Vi fjerner absoluttverdien og får at

$$\begin{aligned}
-\epsilon &< \frac{x+1}{x^2-1}+\frac{1}{2} &&< \epsilon \\
-\frac{1}{2}-\epsilon &< \frac{x+1}{x^2-1} &&< -\frac{1}{2}+\epsilon \\
\frac{-2\,\epsilon-1}{2} &< \frac{x+1}{(x+1)\,(x-1)} &&< \frac{2\,\epsilon-1}{2} \\
\frac{-2\,\epsilon-1}{2} &< \frac{1}{x-1} &&< \frac{2\,\epsilon-1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Vi gjør oss så et par viktige bemerkninger:

- Vi ser at etter forenklingene kunne vi bare ha satt inn for x verdien den går mot for å bestemme grenseverdien. Dette er fordi forenklingene vi har gjort ikke endrer på grenseverdien. Dette betyr at
$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}\,.$$
Observer at funksjonen vi startet med ikke er definert for $x=-1$, mens $\frac{1}{x-1}$ er.
- Vi må nå snu brøken for å løse ulikhetene med hensyn på x og må da passe på fortegnene. Spesielt kan vi observere at uttrykket til venstre, $\frac{-2\,\epsilon-1}{2}$, er negativt for alle $\epsilon>0$, mens utrykket til høyre, $\frac{2\,\epsilon-1}{2}$, endrer fortegn for $\epsilon=\frac{1}{2}$. For $\epsilon=\frac{1}{2}$ er nevneren null. Dette må vi huske å ta hensyn til hvis vi snur brøken, slik at vi ikke ender opp med å dele på null. Ideelt sett skulle vi behandlet alle tre tilfellene hver for seg: $\epsilon<\frac{1}{2}$, $\epsilon=\frac{1}{2}$ og $\epsilon>\frac{1}{2}$. Dette fordi den formelle definisjonen av grenseverdi må være tilfredstilt *for alle* $\epsilon>0$. Heldigvis er det mulig å omgå dette. Nøkkelen ligger i å se at gitt en ϵ så trenger vi bare å finne én δ slik at ulikhetene over er tilfredsstilt. Vi trenger ikke finne den best mulige δ, bare være sikre på at for alle mulige ϵ så finnes det en δ som fungerer. Derfor trenger vi bare undersøke tilfellet $\epsilon<\frac{1}{2}$, fordi enhver δ vi finner her vil fungere enda bedre også for større ϵ.

Ved å følge bemerkningene over, kan vi snu brøkene og oppnå

$$\begin{aligned}
\frac{2}{2\,\epsilon-1} &< x-1 &&< \frac{2}{-2\,\epsilon-1} \\
\frac{2}{2\,\epsilon-1}+1 &< x &&< \frac{2}{-2\,\epsilon-1}+1\,.
\end{aligned}$$

Siden vi ser på grensen når $x\to-1$, er det lurt for beviset å sette inn -1 i ulikhetene for x. Dette gjør vi ved å legge til $0=1-1$ på begge sider, slik at vi får

$$\begin{aligned}
\frac{2}{2\,\epsilon-1}+1+1-1 &< x &&< \frac{2}{-2\,\epsilon-1}+1+1-1 \\
\frac{4\,\epsilon}{2\,\epsilon-1}-1 &< x &&< \frac{4\,\epsilon}{2\,\epsilon+1}-1\,.
\end{aligned}$$

Vi har nå to mulige verdier:

$$\delta_1=-\frac{4\,\epsilon}{2\,\epsilon-1},\quad \delta_2=\frac{4\,\epsilon}{2\,\epsilon+1}\,.$$

Observer at $\frac{4\epsilon}{2\epsilon-1} < 0$, vi har derfor minus foran, siden vi ønsker en positiv δ. Til slutt velger vi

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}\,.$$

Denne verdien vil fungere for alle $\epsilon > 0$, og vi er i mål.