Trasendentale funksjoner

Department of Mathematical Sciences, NTNU, Norway

September 9, 2014

- Inverse funksjoner, definisjon og eksistens
- Deriverte av inverse funksjoner
- Eksponensialfunksjonen
- Logaritme

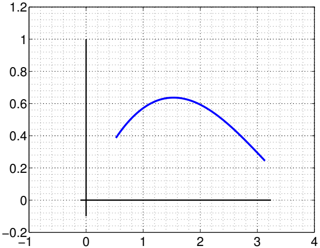
Definisjon av funksjon: en funksjon fra intervallet $I = [a, b]$ med verdier i $\mathbb{R}$ (de reelle tall) er **en regel** som for hver $x \in I$ gir **en og bare en** verdi $f(x)$ i $\mathbb{R}$.

Definisjon av funksjon: en funksjon fra intervallet $I = [a, b]$ med verdier i $\mathbb{R}$ (de reelle tall) er **en regel** som for hver $x \in I$ gir **en og bare en** verdi $f(x)$ i $\mathbb{R}$. Vi skriver

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

Definisjon av funksjon: en funksjon fra intervallet $I = [a, b]$ med verdier i $\mathbb{R}$ (de reelle tall) er **en regel** som for hver $x \in I$ gir **en og bare en** verdi $f(x)$ i $\mathbb{R}$. Vi skriver

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$



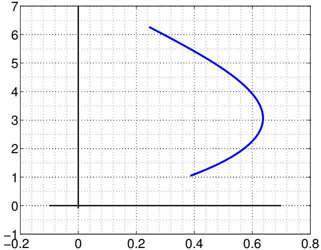


Figure : Venstre: en funksjon. Høyre: grafen er ikke en funksjon.

Vi skriver $\mathcal{D}(f)$ for definisjonsmengde (domene) til f.

Funksjoner

Definisjon av funksjon: en funksjon fra intervallet $I = [a, b]$ med verdier i $\mathbb{R}$ (de reelle tall) er **en regel** som for hver $x \in I$ gir **en og bare en** verdi $f(x)$ i $\mathbb{R}$. Vi skriver

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

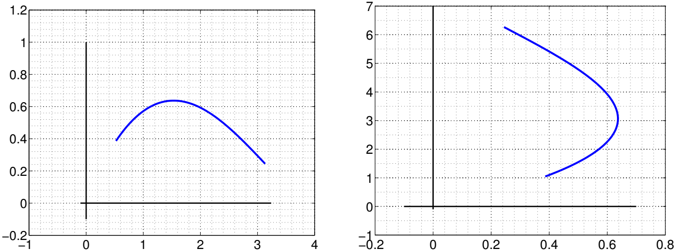


Figure : Venstre: en funksjon. Høyre: grafen er ikke en funksjon.

Vi skriver $\mathcal{D}(f)$ for definisjonsmengde (domene) til f. Her er $\mathcal{D}(f) = I$.

Funksjoner

Definisjon av funksjon: en funksjon fra intervallet $I = [a, b]$ med verdier i $\mathbb{R}$ (de reelle tall) er **en regel** som for hver $x \in I$ gir **en og bare en** verdi $f(x)$ i $\mathbb{R}$. Vi skriver

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

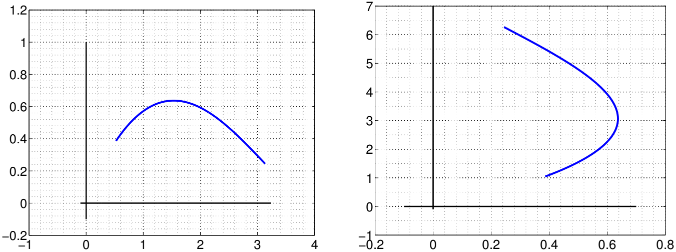


Figure : Venstre: en funksjon. Høyre: grafen er ikke en funksjon.

Vi skriver $\mathcal{D}(f)$ for definisjonsmengde (domene) til f. Her er $\mathcal{D}(f) = I$.
Verdiområde (range) til f er $\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y = f(x), \quad x \in \mathcal{D}(f)\}$.

Definisjon av inverse: Inverse av en funksjon f, *hvis den eksisterer*, er en annen funkjson f^{-1} som er slik at andvendt på $f(x)$ gir x som resultat:

$$x = f^{-1}(f(x)).$$

Domene til f^{-1} er mengden av alle reelle tall $y = f(x)$ der $x \in \mathcal{D}(f)$. (Veriområde til f).

Finn inverse til $f(x) = 2x - 1$

Vi kan tenke på to forskjellige måter for å oppnå resulatet

- Vi kan finne vei tilbake til x ved å *omgjøre* det som f har gjort:
  f gjør: "gang med 2 og trekk 1 fra resultatet".

Finn inverse til $f(x) = 2x - 1$

Vi kan tenke på to forskjellige måter for å oppnå resulatet

- Vi kan finne vei tilbake til x ved å *omgjøre* det som f har gjort:
  f gjør: "gang med 2 og trekk 1 fra resultatet".
  f^{-1} omgjør dette: " legg til 1 og så del med 2" .

Vi kan tenke på to forskjellige måter for å oppnå resulatet

- Vi kan finne vei tilbake til x ved å *omgjøre* det som f har gjort:
  f gjør: "gang med 2 og trekk 1 fra resultatet".
  f^{-1} omgjør dette: " legg til 1 og så del med 2" . Vi får

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$$

Finn inverse til $f(x) = 2x - 1$

Vi kan tenke på to forskjellige måter for å oppnå resulatet

- Vi kan finne vei tilbake til x ved å *omgjøre* det som f har gjort:
  f gjør: "gang med 2 og trekk 1 fra resultatet".
  f^{-1} omgjør dette: " legg til 1 og så del med 2" . Vi får

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$$

- Ellers kan vi gå fram slik: $y = f(x) = 2x - 1$, vi finner x som funksjon av y det vil si vi løser ligningen

$$y = 2x - 1$$

  med hensyn på x: vi får

$$x = \frac{y+1}{2}$$

  inverse funksjonen er $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$

Inverse av f er funksjonen som gitt $f(x)$ *finner vei tilbake* til x.

Inverse av f er funksjonen som gitt $f(x)$ *finner vei tilbake* til x. Men hvis det finnes to distinkte punkter x_1 og x_2 i domenet til f som gir samme verdi $y = f(x_1) = f(x_2)$ da er det ikke klart til hvilken av x_1 eller x_2 skal f^{-1} finne vei tilbake til.

Inverse av f er funksjonen som gitt $f(x)$ *finner vei tilbake* til x. Men hvis det finnes to distinkte punkter x_1 og x_2 i domenet til f som gir samme verdi $y = f(x_1) = f(x_2)$ da er det ikke klart til hvilken av x_1 eller x_2 skal f^{-1} finne vei tilbake til. Da eksisterer ikke f^{-1}.

Inverse av f er funksjonen som gitt $f(x)$ *finner vei tilbake* til x. Men hvis det finnes to distinkte punkter x_1 og x_2 i domenet til f som gir samme verdi $y = f(x_1) = f(x_2)$ da er det ikke klart til hvilken av x_1 eller x_2 skal f^{-1} finne vei tilbake til. Da eksisterer ikke f^{-1}.

Definisjon av en en-til-en funksjon: en funksjon

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

er **en-til-en** hvis

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

for alle x_1 og x_2 som er i domenet til f.

Hvis f er en-til-en da eksisterer inversen til f (med rekkevidden til f som domen). Og hvis f er slik at inversen f^{-1} eksisterer da er f en-til-en.

Inverse av f er funksjonen som gitt $f(x)$ *finner vei tilbake* til x. Men hvis det finnes to distinkte punkter x_1 og x_2 i domenet til f som gir samme verdi $y = f(x_1) = f(x_2)$ da er det ikke klart til hvilken av x_1 eller x_2 skal f^{-1} finne vei tilbake til. Da eksisterer ikke f^{-1}.

Definisjon av en en-til-en funksjon: en funksjon

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

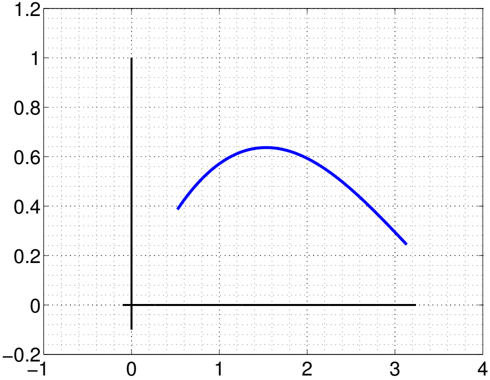
er **en-til-en** hvis

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

for alle x_1 og x_2 som er i domenet til f.

Hvis f er en-til-en da eksisterer inversen til f (med rekkevidden til f som domen). Og hvis f er slik at inversen f^{-1} eksisterer da er f en-til-en.

Praktisk test: En hver horisontal linje skjærer grafen til f max en gang.



Det eksisterer ikke inverse av denne funksjonen med det gitte domenet.

For en hver verdi av $f(x)$ i verdiområde av f må det ikke finnes to distinkte punkter av $[a, b]$ x_1 og x_2 som svarer til samme verdi av f.

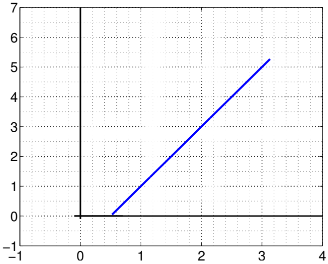
Voksende og avtagende funksjoner er en-til-en:

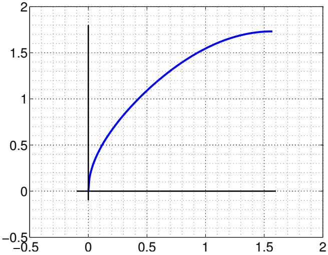
$$f(x) = 2x - 1$$

da

$$f'(x) = 2 > 0$$

er alltid positiv, funksjonen er voksende og dermed en-til-en (vi kan finne inverse).





Vis at funksjonen

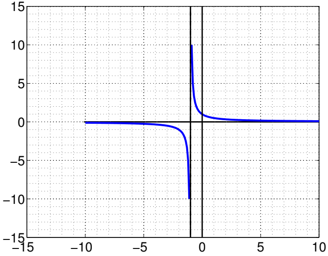
$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

er en-til-en der den er definert og finn inverse.
Finn domenet til f og til f^{-1} og verdiområdene.

Vis at funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

er en-til-en der den er definert og finn inverse.
Finn domenet til f og til f^{-1} og verdiområdene.



- $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\}$
- f er **en-til-en**: La x_1 og x_2 være i $\mathcal{D}(f)$. Anta $f(x_1) = f(x_2)$ da er

  $$\frac{1}{x_1 + 1} = \frac{1}{x_2 + 1} \iff x_1 + 1 = x_2 + 1 \iff x_1 = x_2$$

  med andre ord hvis $x_1 \neq x_2$ da er også $f(x_1) \neq f(x_2)$ og f er en-til-en.
- Vi har $y = \frac{1}{x+1}$. Når $y \neq 0$ kan vi finne x som funksjon av y, $x = \frac{1}{y} - 1$ da blir $f^{-1}(y) = \frac{1}{y} - 1$

- $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$ fordi
  $\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y = f(x) = \frac{1}{x+1},\ x \neq -1\}, \quad \mathcal{D}(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \neq 0\}$
  og nå

$$y = \frac{1}{x+1}, \mathrm{og}\, x \neq -1 \quad \Rightarrow \quad y \neq 0$$

$$y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, x \text{ slik at } y = \frac{1}{x+1}, \mathrm{og}\, x \neq -1$$

definisjonene til $\mathcal{R}(f)$ og $\mathcal{D}(f^{-1})$ er dermed ekvivalente.

- $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$ fordi
  $\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y = f(x) = \frac{1}{x+1},\, x \neq -1\}, \quad \mathcal{D}(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \neq 0\}$
  og nå

$$y = \frac{1}{x+1}, \text{og}\, x \neq -1 \quad \Rightarrow \quad y \neq 0$$

$$y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, x \text{ slik at } y = \frac{1}{x+1}, \text{ og}\, x \neq -1$$

  definisjonene til $\mathcal{R}(f)$ og $\mathcal{D}(f^{-1})$ er dermed ekvivalente.

- $\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$ fordi
  $\mathcal{R}(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{1}{y} - 1,\, y \neq 0\}, \quad \mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -1\}$ og nå

$$x = \frac{1}{y} - 1, \text{og}\, y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -1$$

$$x \neq -1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, y \neq 0 \text{ slik at } \; x - 1 = \frac{1}{y}$$

  definisjonene til $\mathcal{R}(f^{-1})$ og $\mathcal{D}(f)$ er dermed ekvivalente.

Grafen til f^{-1} er speilvendt i forhold til f med hensyn på linja $y = x$.

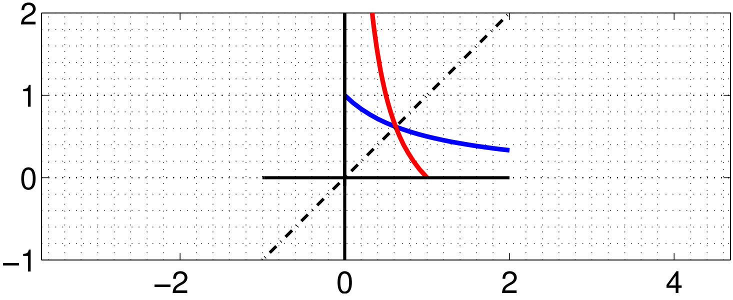


Figure : Blå $f(x)$, rød $f^{-1}(x)$

Grafen til f^{-1} er speilvendt i forhold til f med hensyn på linja $y = x$.

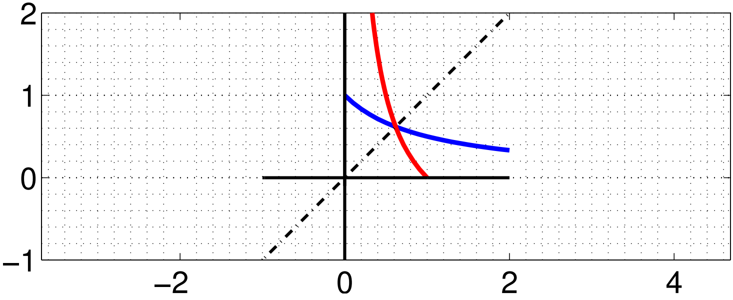


Figure : Blå $f(x)$, rød $f^{-1}(x)$

Her er $f = \frac{1}{x+1}$ for $x \in \mathcal{D}(f) = [0, 2]$ og $f^{-1}(y) = \frac{1}{y} - 1$ for $y \in \mathcal{R}(f) = f([0, 2])$

Grafen til f^{-1} er speilvendt i forhold til f med hensyn på linja $y = x$.

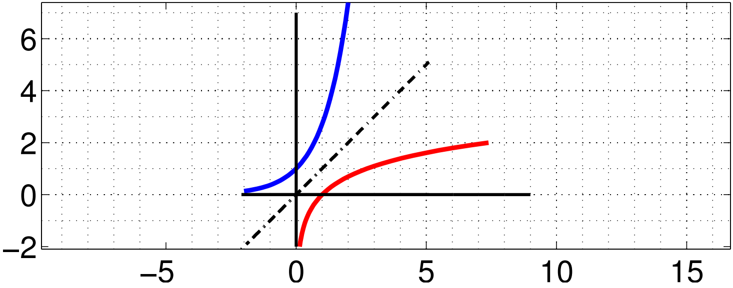


Figure : Blå $f(x)$, rød $f^{-1}(x)$

Her er $f(x) = e^x$ for $x \in \mathcal{D}(f) = [-2, 2]$ og $f^{-1}(y) = \ln(y)$ for $y \in \mathcal{R}(f) = f([-2, 2])$.

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

For å se at dette stemmer bruker man kjærneregelen for å derivere

$$x = f\left(f^{-1}(x)\right)$$

Da er $u = f^{-1}(x)$ og ved kjærneregelen

$$1 = \frac{d}{dx} f\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{d}{du} f(u)\Big|_{u=f^{-1}(x)} \frac{d}{dx} f^{-1}(x)$$

$$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x)$$

Eksempel 4 kap 3.1

er funksjonen

$$f(x) = a^x$$

der $a > 0$ fiksert reell tall og x er variabelen.

er funksjonen

$$f(x) = a^x$$

der $a > 0$ fiksert reell tall og x er variabelen.
Vi bygge forståelsen skritt for skritt

- $a^0 = 1$

er funksjonen

$$f(x) = a^x$$

der $a > 0$ fiksert reell tall og x er variabelen.
Vi bygge forståelsen skritt for skritt

- $a^0 = 1$
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n}$ hvis $n = 1, 2, 3, \ldots$

er funksjonen

$$f(x) = a^x$$

der $a > 0$ fiksert reell tall og x er variabelen.
Vi bygge forståelsen skritt for skritt

- $a^0 = 1$
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n}$ hvis $n = 1, 2, 3, \ldots$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ hvis $n = 1, 2, 3, \ldots$

er funksjonen

$$f(x) = a^x$$

der $a > 0$ fiksert reell tall og x er variabelen.
Vi bygge forståelsen skritt for skritt

- $a^0 = 1$
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n}$ hvis $n = 1, 2, 3, \ldots$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ hvis $n = 1, 2, 3, \ldots$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ hvis $n = 1, 2, 3, \ldots$ og hvis $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

er funksjonen

$$f(x) = a^x$$

der $a > 0$ fiksert reell tall og x er variabelen.
Vi bygge forståelsen skritt for skritt

- $a^0 = 1$
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n}$ hvis $n = 1, 2, 3, \ldots$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ hvis $n = 1, 2, 3, \ldots$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ hvis $n = 1, 2, 3, \ldots$ og hvis $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

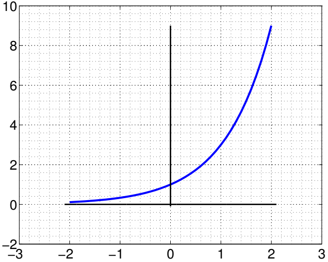
hvis r er en rational tall vi sier at a^x for x reell tall er

$$a^x = \lim_{r \to x} a^r$$

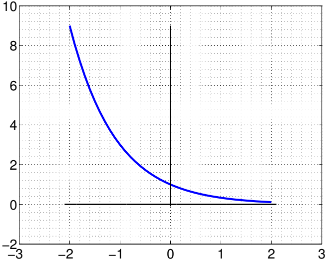
Eksempel: 2^π

De vanlige potenseregler overføres til eksponensjalfunksjonen

- $a^0 = 1$
- $a^{x+y} = a^x\, a^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x\, b^x$



$$a > 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} a^x = \infty$$



$$0 < a < 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} a^x = 0$$

Logaritmefunksjonen er inverse av eksponensjalfunksjonen der inverse eksisterer:

$$a^x$$

er en-til-en hvis $a > 0$ og $a \neq 1$ og kan inverteres.

Logaritmefunksjonen er inverse av eksponensjalfunksjonen der inverse eksisterer:

$$a^x$$

er en-til-en hvis $a > 0$ og $a \neq 1$ og kan inverteres. Da har vi

$$y = \log_a(x) \iff x = a^y, \qquad (a > 0, \quad a \neq 1)$$

De vanlige potenseregler oversettes til logaritme

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Bevis ved bruk av definisjonen av logaritme og potenseregler for exponensjalfunksjon:

$$a^{\log_a x} = x, \qquad b^{\log_b a} = a, \qquad b^{\log_b x} = x$$

so

$$b^{\log_b x} = a^{\log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = b^{\log_b a \cdot \log_a x}$$

så

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$

og

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Bevis ved bruk av definisjonen av logaritme og potenseregler for exponensjalfunksjon:
Vi bruke definisjon av logaritme og får at

$$x = a^{\log_a x}, \qquad a = x^{\log_x a},$$

vi setter inn uttrykket for a i uttrykket for x. Vi får

$$x = \left(x^{\log_x a}\right)^{\log_a x} = x^{\log_x a \cdot \log_a x}$$

og vi får

$$1 = \log_x a \cdot \log_a x,$$

som er det samme som

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

- Den naturlige eksponensialfunksjonen
- Den naturlige logaritmen

- Inverse trigonometriske funksjoner (med derivasjon/integrasjon)
- Hyperbolske funksjoner (med derivasjon, identiteter).
- Koblede hastigheter (med flere eksempler).