Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 06

$\boxed{2.8.2}$ Vi merker oss først at funksjonen f er både kontinuerlig og deriverbar på intervallet [1,2], slik at forutsetningene for sekantsetningen (eller middelverditeoremet; *Mean Value Theorem*, side 137 i boka) er oppylt. Stigningstallet, m, til den rette linjen mellom startpunktet $(1, f(1))$ og sluttpunktet $(2, f(2))$ er gitt ved

$$m = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{1}}{1} = -\frac{1}{2}.$$

Videre er den deriverte til f gitt som

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Vi ønsker å finne et punkt $c \in (1,2)$ slik at $f'(c) = m$, det vil si

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} &= -\frac{1}{2} \\ c^2 &= 2 \\ c &= \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Siden punktet $c = \sqrt{2}$ ligger i intervallet (1,2), har vi vist at sekantsetningen er oppfylt for f.

$\boxed{2.9.4}$ Vi kan ikke uttrykke y eksplisitt som funksjon av x. Derfor deriverer vi ligningen implisitt med hensyn på x.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3y + xy^5) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3y) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy^5) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3)y + x^3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)y^5 + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^5) &= 0 \\ 3x^2y + x^3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^5 + x \cdot 5y^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ (x^3 + 5xy^4)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y^5 - 3x^2y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{y^5 + 3x^2y}{x^3 + 5xy^4}. \end{aligned}$$

I utregningen over har vi blant annet brukt produktregelen og kjerneregelen for derivasjon.

$\boxed{2.9.18}$ Uttrykket kan ikke løses eksplisitt for y, så vi deriverer implisitt,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4y^2) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4) \\ 2x + 8y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ x + 4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0.\end{aligned}$$

Vi fortsetter med å derivere implisitt for å finne et uttrykk for $y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$,

$$\begin{aligned}2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(8y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 8y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) &= 0 \\ 2 + 8\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 8y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= 0 \\ 1 + 4\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 4y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= 0.\end{aligned}$$

Vi kan nå løse for $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ i den første ligningen,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{4y},$$

og deretter sette dette inn i det andre utrykket og løse for $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$,

$$\begin{aligned}1 + 4\left(-\frac{x}{4y}\right)^2 + 4y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= 0 \\ 1 + 4\frac{x^2}{16y^2} + 4y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{1 + 4\frac{x^2}{16y^2}}{4y} \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{4y^2 + x^2}{16y^3}.\end{aligned}$$

Vi kunne også valgt en litt annen løsningsstrategi ved å først løse den første ligningen for $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ og så derivere det uttrykket implisitt. Da måtte vi ha brukt kvotientregelen for derivasjon, men vi ville endt opp med samme svaret til slutt.

$\boxed{4.3.8}$ Denne oppgaven kan løses ved å bruke l'Hôpitals regel to ganger. Vi går gjennom dette grundig steg for steg.

La $f(x) = 1 - \cos x$ og $g(x) = \ln(1 + x^2)$. Vi skal evaluere grensen $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$, og ser at uttrykket er på ubestemt form av typen $[0/0]$. Vi vet at både f og g er deriverbare, så vi prøver å bruke l'Hôpitals regel. De deriverte er gitt ved

$$f'(x) = \sin x, \quad g'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Vi har at $f'(0) = g'(0) = 0$, slik at vi fortsatt har et uttrykk på ubestemt form av typen $[0/0]$. Dersom vi deriverer funksjonene på nytt får vi at

$$f''(x) = \cos x, \quad g''(x) = \frac{(1 + x^2)\cdot 2 + 2x\cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 + 6x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Altså er $f'(x)$ og $g'(x)$ deriverbare og vi ser at $g''(0) = 2 \neq 0$. Vi kan derfor benytte l'Hôpitals regel på grensen $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{2+6x^2}{(1+x^2)^2}} \\ &= \frac{\lim_{x\to 0} \cos x}{\lim_{x\to 0} \frac{2+6x^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Siden vi nå har vist at $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksisterer, vet vi fra l'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}.$$

<u>OBS!</u> Man kan gjøre dette fortløpende ved å derivere teller og nevner hver for seg inntil man ikke lenger har et uttrykk på ubestemt form, men man må da hele tiden sjekke at både teller og nevner faktisk er deriverbar på et åpent intervall rundt den verdien som x går mot og at også nevneren er ulik null i et slikt intervall.

$\boxed{\text{4.4.12}}$ Vi starter med å finne den deriverte til f,

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Vi har tre kategorier med kandidater til lokale og globale maksimum- og minimumsverdier:

(i) *Kritiske punkter*, der $f'(x) = 0$. Det finnes ingen x slik at $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} = 0$.

(ii) *Singulære punkter*, der $f'(x)$ ikke eksisterer. Vi ser at $f'(x)$ eksisterer i alle punkter utenom $x = 1$, men dette punktet ligger ikke i intervaller [2,3].

(iii) *Endepunkter* av domenet. Vi har to endepunkter, $x_1 = 2$ og $x_2 = 3$.

Vi regner til slutt ut funksjonsverdiene i alle kandidatene for å finne maksimum og minimum.

$$f(x_1) = \frac{1}{2-1} = 1, \quad f(x_2) = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}.$$

Konklusjonen er at det globale maksimumet til f på intervallet [2,3] er 1, mens det globale minimumet er $\frac{1}{2}$. Det finnes ingen andre lokale ekstremverdier.

$\boxed{\text{4.5.34}}$ Vi starter med å regne ut de deriverte til f,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\mathrm{e}^x + (x^2-3)\mathrm{e}^x = (x^2+2x-3)\mathrm{e}^x, \\ f''(x) &= (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x-3)\mathrm{e}^x = (x^2+4x-1)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Vi finner så de kritiske punktene der $f'(x) = 0$. Siden e^x aldri er null, må de kritiske punktene tilfredstille

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Denne andregradligningen har to løsninger,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -3.$$

Vi har ingen singulære punkter siden $f'(x)$ eksisterer for alle x. Videre har vi heller ingen endepunkter da $f(x)$ er definert for alle x, det vil si $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Vi utfører andrederiverttesten,

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= (1 + 4 - 1)\mathrm{e}^1 = 4\mathrm{e} > 0, \\ f''(x_2) &= (0 - 12 - 1)\mathrm{e}^{-3} = -4e^{-3} < 0. \end{aligned}$$

Vi konkluderer med at $x_1 = 1$ er et lokalt minimum, mens $x_2 = -3$ er et lokalt maksimum.

4.6.24 Vi prøver å få så mye informasjon ut av funksjonen $f(x) = \frac{(2-x)^2}{x^3}$ og dens deriverte som mulig, slik at vi kan tegne en mest mulig korrekt skisse av f.

Det første vi observerer er at $f(x) < 0$ for alle $x < 0$ og $f(x) > 0$ for alle $x > 0$. Vi ser også at f verken er odde eller like siden $f(2) = 0$, mens $f(-2) \neq 0$.

Vi studerer så de deriverte til f,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^3 \cdot 2(2-x)(-1) - (2-x)^2 3x^2}{x^6} \\ &= \frac{-2x(2-x) - 3(2-x)^2}{x^4} \\ &= -\frac{(2-x)(2x + 3(2-x))}{x^4} \\ &= -\frac{(2-x)(6-x)}{x^4}, \\ f''(x) &= -\frac{x^4((-1)(6-x) + (2-x)(-1)) - (2-x)(6-x)4x^3}{x^8} \\ &= -\frac{x(-6 + x - 2 + x) - 4(12 - 2x - 6x + x^2)}{x^5} \\ &= -\frac{-2x^2 + 24x - 48)}{x^5} \\ &= \frac{2(x^2 - 12x + 24)}{x^5}. \end{aligned}$$

Vi ser at

- $f'(x) = 0$ for $x = 2$ og $x = 6$. Dette er de kritiske punktene til f.
- $f'(x) < 0$ når $x < 2$ og $x > 6$. På disse intervallene er f synkende.
- $f'(x) > 0$ når $2 < x < 6$. På dette intervaller er f stigende.

Tilsvarende ser vi at

- $f''(x) = 0$ for $x = 6 \pm 2\sqrt{2}$. Dette er vendepunktene til f.
- $f''(x) < 0$ når $6 - 2\sqrt{2} < x < 6 + 2\sqrt{2}$. På dette intervallet vender f nedover.
- $f''(x) > 0$ når $x < 6 - 2\sqrt{2}$ og $x > 6 + 2\sqrt{2}$. På disse intervallene vender f oppover.

Vi ser at vi har et singulært punkt i $x = 0$ siden $f'(x)$ ikke er definert her. Vi skal snart se at dette er en asymptote.

Vi har nå funnet alle kandidater til lokale maksimum og minimum til f. Dette er de kritiske punktene. Ved å gjøre andrederiverttesten ser vi at $x = 2$ må være et lokalt minimum, mens $x = 6$, må være et lokalt maksimum. Vi har dessuten at $f(2) = 0$ og $f(6) = \frac{4^2}{6^3} \approx 0{,}074$.

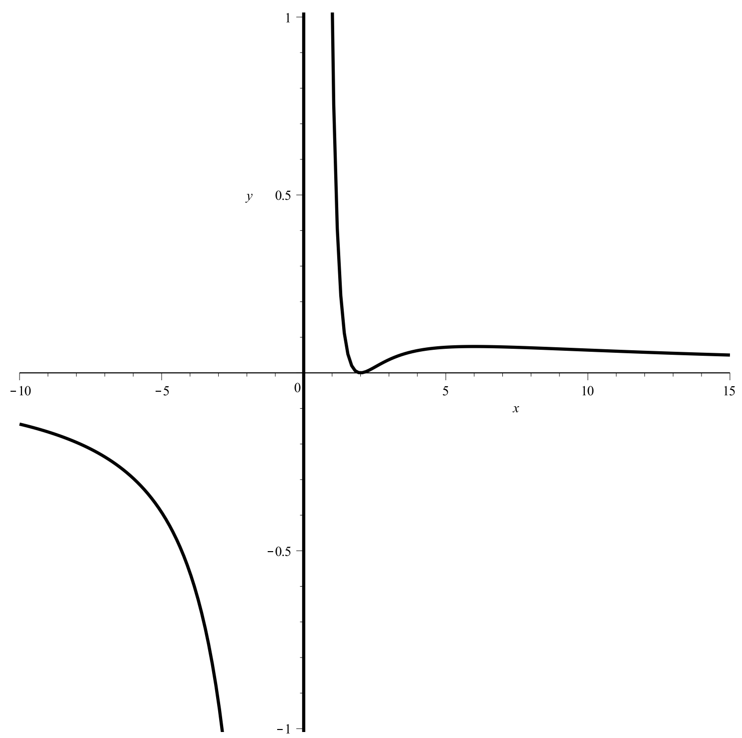
For å finne vertikale asymtoter, ser vi etter punkter c der $\lim_{x\to c} = \pm\infty$. Vi ser raskt at $x = 0$ er et slikt punkt siden

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = \infty.$$

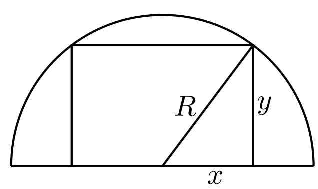
Vi finner så horisontale asymtoter ved å studere $f(x)$ når $x \to \pm\infty$,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Vi har nå mye informasjon om formen til f, så vi bør kunne tegne en rimelig god skisse. Figuren under viser hvordan f virkelig ser ut.



$\boxed{4.8.12}$ Vi tegner først en figur:



Omkretsen av rektangelet er gitt som $O = 4x + 2y$. Dessuten har vi at $R^2 = x^2 + y^2$. Vi løser for y,

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},$$

og får O uttrykt ved x alene,

$$O = 4x + 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Vi finner kandidater til maksimum ved å sette $\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}x} = 0$. Dette gir

$$\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}x} = 4 + 2\frac{(-2x)}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = 4 - \frac{2x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0.$$

Vi multipliserer begge sider med $\sqrt{R^2 - x^2}$, kvadrerer og løser så for x,

$$\begin{aligned} 4\sqrt{R^2 - x^2} &= 2x \\ 16(R^2 - x^2) &= 4x^2 \\ 4R^2 &= 5x^2 \\ x &= \sqrt{\frac{4}{5}}R = 2\sqrt{\frac{1}{5}}R. \end{aligned}$$

Vi er kun interessert i $x > 0$, derfor ser vi bort i fra løsningen $x = -\sqrt{\frac{4}{5}}R$.

Satt inn i uttrykket for y får vi

$$y = \sqrt{R^2 - \frac{4}{5}R^2} = \sqrt{\frac{1}{5}}R.$$

Den maksimale omkretsen av rektangelet er altså

$$O = 4 \cdot 2\sqrt{\frac{1}{5}}R + 2\sqrt{\frac{1}{5}}R = 10\sqrt{\frac{1}{5}}R = 10\frac{\sqrt{5}}{5}R = 2\sqrt{5}R.$$