Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

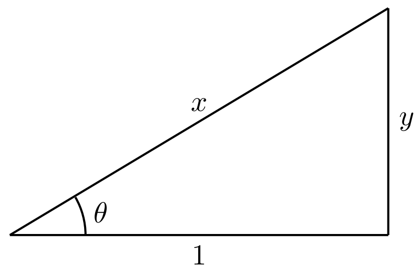
Løsningsforslag — Øving 05

3.5.18 Vi skal evaluere $\tan\left(\sec^{-1} x\right)$. Funksjonen $\sec^{-1} x$ er plottet på side 197 i boka, og vi ser at den kun er definert for $|x| > 1$. Vi ser også at den er monotont voksende på hele dette området. Det betyr at den også er inverterbar for alle $|x| > 1$.

La $\theta = \sec^{-1} x$. Vi har da at

$$x = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{x}.$$

Vi husker at i en rettvinklet trekant er cosinus forholdet mellom hosliggende katet og hypotenusen. Vi tegner derfor en rettvinklet trekant der den ene kateten har lengde 1, hypotenusen har lengde x og vinkelen mellom disse θ. Den siste sidekanten kaller vi y.



Via Pythagoras' læresetning har vi at $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Siden tangens er lik motstående katet over hosliggende katet, følger det at

$$\tan\left(\sec^{-1} x\right) = \tan\theta = \frac{y}{1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Husk at vi antok at $|x| > 1$, slik at uttrykket alltid er definert.

3.5.30 Vi bruker derivasjonsregelen for $\cos^{-1} x$,

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

sammen med kjerneregelen for derivasjon. For å forenkle utregningen lar vi $u = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Vi regner først ut den deriverte til u,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{dx}\left(a(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = a\left(-\frac{1}{2}\right)(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}}{dx}(a^2 + x^2) \\ &= -\frac{a}{2}(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}\,2x = -\frac{ax}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{ax}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}}.\end{aligned}$$

Deretter finner vi den deriverte av y,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{dx}\cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+x^2}}}\left(-\frac{ax}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+x^2}}\cdot\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\frac{ax}{(a^2+x^2)} = \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2-a^2}(a^2+x^2)} = \frac{a}{a^2+x^2}.$$

$\boxed{3.6.2}$ Vi starter med å bruke definisjonene av $\cosh x$ og $\sinh x$ (side 199 i boka) og utvider høyresidene:

$$\begin{aligned}
\cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y &= \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2} + \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}\\
&= \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}}{4} + \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}}{4}\\
&= \frac{2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y+2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}}{4} = \frac{\mathrm{e}^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y).
\end{aligned}$$

Helt tilsvarende kan vi vise den andre likheten,

$$\begin{aligned}
\sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y &= \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2} + \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}\\
&= \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}}{4} + \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}}{4}\\
&= \frac{2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y-2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}}{4} = \frac{\mathrm{e}^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y).
\end{aligned}$$

For å finne tilsvarende uttrykk for $\cosh(x-y)$ og $\sinh(x-y)$ kan vi enten følge prosedyren ovenfor motsatt vei eller sette inn $-y$ for y i utrykkene over. Vi viser her de to fremgangsmåtene på hvert sitt utrykk.

$$\begin{aligned}
\cosh(x-y) &= \frac{\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{-(x+y)}}{2} = \frac{2\mathrm{e}^{x+y}+2\mathrm{e}^{-(x+y)}}{4}\\
&= \frac{(\mathrm{e}^{x-y}+\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{-x-y}+\mathrm{e}^{-x+y})+(\mathrm{e}^{x-y}-\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^{-x-y}+\mathrm{e}^{-x+y}}{4}\\
&= \frac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^y)}{4} + \frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^y)}{4}\\
&= \cosh x\cosh y + \sinh x(-\sinh y) = \cosh x\cosh y - \sinh x\sinh y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh(x-y) = \sinh(x+(-y)) &= \sinh x\cosh(-y) + \cosh x\sinh(-y)\\
&= \sinh x\cosh y - \cosh x\sinh y.
\end{aligned}$$

Vi har her brukt identitetene $\cosh(-y) = \cosh y$ og $\sinh(-y) = -\sinh y$, side 199 i boka.

$\boxed{3.6.5}$ Vi bruker uttrykkene for de inverse av de hyperbolske funksjonene, side 202 i boka:

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$
$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),$$
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Ved hjelp av kjerneregelen for derivasjon får vi nå at

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{dx}\sinh^{-1} x &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x\right)\\ &= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}\\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

Helt tilsvarende, man trenger bare bytte ut x^2+1 med x^2-1, er

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Hvis du ikke er helt overbevist om at dette er riktig, anbefaler vi at du går gjennom utregningene over på nytt.

For $\tanh^{-1} x$ får vi at

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{dx}\tanh^{-1} x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}.\end{aligned}$$

Av Definisjon 8, side 149 i boka, følger det nå at

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \sinh^{-1} x + C_1,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1} x + C_2,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \tanh^{-1} x + C_3.$$

Vi har brukt ulike integrasjonskonstanter for å poengtere at disse ikke på noen måte er relatert.

$\boxed{4.1.16}$ Vi vet at avstanden s øker med $100\,\mathrm{km/t}$, det vil si at

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 100.$$

Vi er interessert i å finne farten til bilen, altså $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

Punktene A,C og P danner en rettvinklet trekant med sidelengder henholdsvis x, s og k. Av Pythagoras' læresetning følger det at

$$s^2 = k^2 + x^2.$$

Vi vet at k er konstant, og deriverer med hensyn på tiden t,

$$2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0 + 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{s}{x} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Avstandene s og x er ukjente, så vi prøver å eliminere disse fra utrykket. Vi vet at vinkelen mellom laserpistolen og veien er 45°, slik at

$$\frac{x}{s} = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vi kan nå løse for $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2} \cdot 100 \approx 141{,}4.$$

Det vil si at farten til bilen er omlag 141,4 km/t.

4.1.36 Vi lar h være vannhøyden i m, slik at $h = 3$ når bassenget er fullt, og $h = 0$ når det er tomt. Videre lar vi V være vannvolumet i m^3. Det at vannet tappes ut med en rate på 1 m^3/min, betyr at

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 1.$$

Vi ønsker å finne ut hvor fort vannhøyden synker, det vil si $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$.

Vi starter med å finne et uttrykk for V som funksjon av h. La oss se på den nederste delen ($h \leq 2$) av bassenget først. Bredden til bassenget er konstant lik 8, mens lengden av vannet, l, stiger lineært fra $l = 0$ når $h = 0$ til $l = 20$ når $h = 2$. Altså må $l(h) = \frac{20}{2}h = 10h$. Totalt volum V når $h \leq 2$ er altså

$$V = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10h \cdot h = 40h^2.$$

Når $h > 2$, er bredden og lengden konstant, henholdvis lik 8 og 20. Høyden av denne delen av volumet er gitt som $h - 2$. Da blir volumet av den øverste delen $8 \cdot 20 \cdot (h-2) = 160(h-2)$, og vi får det totale volumet ved å legge til den nederste delen,

$$V = 160(h-2) + 40 \cdot 2^2 = 160(h-2) + 160 = 160(h-1).$$

Oppsummert er volumet som funksjon av høyden gitt ved

$$V(h) = \begin{cases} 40h^2, & \text{når } h \leq 2, \\ 160(h-1), & \text{når } h > 2. \end{cases}$$

a) Når $h = 2{,}5$, får vi at

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 160\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{160}\cdot\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{160}\cdot 1 = 0{,}00625.$$

b) Når $h = 1$, får vi at

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 80h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{80h}\cdot\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{80\cdot 1}\cdot 1 = 0{,}0125.$$

Oppsummert har vi at når vannstanden er 2,5 m synker den med 0,00625 m/min eller 6,25 mm/min, mens når vannstanden er 1 m synker den med 0,0125 m/min eller 12,5 mm/min.

4.2.14 Vi prøver først å finne ut hvor mange løsninger som finnes. Observer at både $\cos x$ og x^2 er like funksjoner. Det følger at dersom x_1 er en løsning, det vil si at $\cos x_1 = x_1^2$, så er også $-x_1$ en løsning.

Videre vet vi at $x^2 > 1$ når $|x| > 1$, og at $\cos x \leq 1$ for alle x. Altså må alle løsninger ligge i intervallet $-1 \leq x \leq 1$.

La

$$f(x) = \cos x - x^2.$$

Vi ønsker å bestemme alle x slik at $f(x) = 0$. Vi har at

$$f'(x) = -\sin x - 2x.$$

Det vil si at $f(x) < 0$ for $x \in (0{,}1]$, slik at $f(x)$ er synkende her. Altså kan det bare være en løsning på dette intervallet. Endepunktet på intervallet, $x = 0$, er åpenbart ikke riktig løsning.

Vi konkluderer analysen vår med at det finnes akkurat to løsninger, en i intervallet $(0{,}1]$ og en i intervallet $[-1{,}0)$.

Vi bruker så Newtons metode (side 224 i boka), til å bestemme roten i intervallet $(0{,}1]$. I vårt eksempel får vi at

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n^2}{-\sin x_n - 2x_n} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n^2}{\sin x_n + 2x_n}.$$

Som startpunkt bruker vi midtpunktet, $x_0 = 0{,}5$, men andre punkter vil også fungere. Vi utfører første iterasjon, og får

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos x_0 - x_0^2}{\sin x_0 + 2x_0} = 0{,}5 + \frac{\cos 0{,}5 - 0{,}5^2}{\sin 0{,}5 + 2\cdot 0{,}5} \approx 0{,}924206927293198 \approx 0{,}924.$$

Ved å iterere videre (husk å ta med alle desimaler i x_n når du regner ut x_{n+1}), får vi følgende resultat:

n	x_n	$f(x_n)$
0	0,500000000000000	$6{,}28 \cdot 10^{-01}$
1	0,924206927293198	$-2{,}52 \cdot 10^{-01}$
2	0,829105755997418	$-1{,}19 \cdot 10^{-02}$
3	0,824146131728195	$-3{,}29 \cdot 10^{-05}$
4	0,824132312409912	$-2{,}56 \cdot 10^{-10}$
5	0,824132312302522	$1{,}11 \cdot 10^{-16}$
6	0,824132312302522	$1{,}11 \cdot 10^{-16}$

Fem iterasjoner er altså nok for å nå maskinpresisjon ($\sim 10^{-16}$).

De to løsningene er $x = \pm\, 0{,}824132312302522$.

$\boxed{4.2.18}$ Vi skal finne maksimum og minimum for funksjonen

$$g(x) = \frac{\sin x}{1 + x^2}.$$

Sinus er en oscillerende funksjon mellom -1 og 1, så vi kan forvente mange lokale maksimum og minimum for $g(x)$. Samtidig er nevneren $1 + x^2$ monotont økende, slik at vi forventer at globalt maksimum må være det lokale maksimumet som ligger nærmest $x = 0$, og tilsvarende for det globale minimumet. Vi merker oss også at $g(x)$ er definert for alle $x \in \mathbb{R}$.

For å finne kandidater til maksimum og minimum, regner vi først ut den deriverte,

$$g'(x) = \frac{(1 + x^2)\cos x - \sin x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2}.$$

Vi ser at $g'(x) = 0$ når telleren er null. Vi ønsker altså å finne røtter til funksjonen

$$f(x) = (1 + x^2)\cos x - 2x \sin x.$$

For å løse $f(x) = 0$ bruker vi Newtons metode,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Den deriverte til $f(x)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos x + (1 + x^2)(-\sin x) - (2\sin x + 2x\cos x) \\ &= -(1 + x^2)\sin x - 2\sin x = -(3 + x^2)\sin x. \end{aligned}$$

På tilsvarende måte som i forrige oppgave itererer vi oss frem til løsningen. Merk at vi ikke kan velge $x_0 = 0$, siden $f'(0) = 0$. Vi velger derfor $x_0 = 1{,}0$ i første omgang (husk at vi vet at globalt maksimum og minimum ligger nært null).

n	x_n	$f(x_n)$
0	1,0000000000000000	$-6{,}02 \cdot 10^{-01}$
1	0,8210463079671654	$-6{,}09 \cdot 10^{-02}$
2	0,7983816444825249	$-9{,}50 \cdot 10^{-04}$
3	0,7980170858066054	$-2{,}45 \cdot 10^{-07}$
4	0,7980169918423763	$-1{,}60 \cdot 10^{-14}$
5	0,7980169918423702	$-2{,}22 \cdot 10^{-16}$

Deretter prøver vi $x_0 = -1{,}0$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	$-1{,}0000000000000000$	$-6{,}02 \cdot 10^{-01}$
1	$-0{,}8210463079671654$	$-6{,}09 \cdot 10^{-02}$
2	$-0{,}7983816444825249$	$-9{,}50 \cdot 10^{-04}$
3	$-0{,}7980170858066054$	$-2{,}45 \cdot 10^{-07}$
4	$-0{,}7980169918423763$	$-1{,}60 \cdot 10^{-14}$
5	$-0{,}7980169918423702$	$-2{,}22 \cdot 10^{-16}$

Vi evaluerer så g i disse to punktene:

$$g(0{,}7980169918423702) \approx 0{,}437,$$
$$g(-0{,}7980169918423702) \approx -0{,}437.$$

Vi konkluderer med at maksimum til g er 0,437 og minimum er $-0{,}437$.

Det at minimumspunktet er lik minus maksimumspunktet, er ikke tilfeldig. Dette følger av at at $\sin x$ og $1 + x^2$ er henholdsvis odde og like funksjoner, slik at også $g(x)$ er odde.