Integrasjon del 2

Department of Mathematical Sciences, NTNU, Norway

October 14, 2014

Husk kjærneregel

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t))\, g'(t)$$

ved fundamentalteoremet (del 2) vi får

$$\int_a^b f'(g(t))\, g'(t)\, dt = f(g(b)) - f(g(a))$$

hvis $A = g(a)$ og $B = g(b)$ vi kan skrive

$$\int_a^b f'(g(t))\, g'(t)\, dt = f(B) - f(A) = \int_A^B f'(u)\, du$$

Oppgave 45 Finn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(x)}dx.$$

Løsning Vi skal bruke at $1+\cos(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$ og

$$\int_a^b f'(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(b)) - f(g(a)).$$

Ved hjelp av $1+\cos(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$ vi får

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(x)}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{2})\, dx,$$

la

$$g(x) = \frac{x}{2}, \qquad g'(x) = \frac{1}{2}, \qquad f'(u) = \cos(u), \qquad f(u) = \sin(u)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(x)}dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{2})\frac{1}{2}\, dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(g(x))\, g'(x)\, dx =$$

$$= 2\sqrt{2}(f(g(\frac{\pi}{2})) - f(g(0))) = 2\sqrt{2}(\sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(0))$$

Oppgave 45 Finn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(x)}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{2})\,dx,$$

Løsning Vi kan bruke substitusjon på en litt annen måte ved å definere $A = g(a)$ og $B = g(b)$ og så bruke

$$\int_a^b f'(g(x))\,g'(x)\,dt = f(B) - f(A) = \int_A^B f'(u)\,du.$$

Som før tar vi

$$g(x) = \frac{x}{2}, \qquad g'(x) = \frac{1}{2}, \qquad f'(u) = \cos(u), \qquad f(u) = \sin(u)$$

da $A = \frac{0}{2} = 0$ og $B = \frac{\pi}{4}$ vi bruker formelen i rekkefølgen

$$\int_a^b f'(g(x))\,g'(x)\,dt = \int_A^B f'(u)\,du = f(B) - f(A)$$

dette gir

$$2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{2})\,\frac{1}{2}\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(u)\,du = 2\sqrt{2}(\sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(0)) = 2.$$

Oppgave 18 Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Løsning Dette betyr at vi skal finne den antideriverte av funksjonen og legge til en konstant. Ved hjelp av fundamentalteorem del 1 den antideriverte er

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{e^t + e^{-t}}, \quad \text{og} \quad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = F(x) + C.$$

Vi nå bruker substitusjon for å finne $F(u)$ og

$$F(u) = \int_a^u f'(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(u)) - f(g(a)).$$

Vi prøver med

$$g(x) = e^x, \quad g'(x) = e^x, \quad f'(y) = \frac{1}{y^2+1}, \quad f(y) = \arctan(y)$$

$$F(u) = \int_a^u \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_a^u f'(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_a^u \frac{e^x\, dx}{(e^{2x}+1)} = \arctan(e^u) - \arctan(e^a),$$

og

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \arctan(e^x) + C$$

Oppgave 18 Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Løsning Dette betyr at vi skal finne den antideriverte av funkjonen og legge til en konstant. Ved hjelp av fundamentalteorem del 1 den antideriverte er

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{e^t + e^{-t}}, \quad \text{og} \quad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = F(x) + C.$$

Vi nå bruker substitusjon for å finne $F(u)$ og vi bruker som før

$$g(x) = e^x, \quad g'(x) = e^x, \quad f'(y) = \frac{1}{y^2+1}, \quad f(y) = \arctan(y)$$

og ved å definere $A = g(a) = e^a$ og $U = g(u) = e^u$ og så bruke

$$F(u) = \int_a^u \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_a^u \frac{e^x dx}{((e^x)^2 + 1)} = \int_a^u f'(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_A^U f'(y)\, dy = f(U) - f(A).$$

$$F(u) = \int_A^U \frac{1}{y^2+1} dy = \arctan(U) - \arctan(A) = \arctan(e^u) - \arctan(e^a),$$

og så

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \arctan(e^x) + C$$

Eksempel 2
Finn arealen av områden omringet av kurvene $y = x^2 - 2x$ og $y = 4 - x^2$.

Eksempel 3
Finn arealen av områden som ligger mellom kurven $y = \sin(x)$ og $y = \cos(x)$ fra $x = 0$ til $x = 2\pi$.

Eksempel 4
Finn arealen av område som ligger på høyre siden av parabelen $x = y^2 - 12$ og til venstre for linjen $y = x$

- Delvisintegrasjon
- Delbrøkoppspalting og integrasjon av rasjonale funksjoner
- Uegentlige integral

Regel for den deriverte av en produkt:

$$\frac{d}{dx}(U(x)V(x)) = U(x)\frac{dV}{dx} + V(x)\frac{dU}{dx}$$

vi integrere på begge sider

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(U(x)V(x))\,dx = \int_a^b U(x)\frac{dV}{dx}\,dx + \int_a^b V(x)\frac{dU}{dx}\,dx$$

og bruker fundamentalteoremet på venstre siden så

$$U(x)V(x)\big|_a^b = \int_a^b U(x)\frac{dV}{dx}\,dx + \int_a^b V(x)\frac{dU}{dx}\,dx$$

som kan også skrives som

$$\int_a^b U(x)\frac{dV}{dx}\,dx = U(x)V(x)\big|_a^b - \int_a^b V(x)\frac{dU}{dx}\,dx$$

Vi bruker

$$\int_a^b U(x)\frac{dV}{dx}\,dx = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)\frac{dU}{dx}\,dx.$$

Eksempel 5:

$$\int_1^e x^3(\ln x)^2\,dx$$

Oppgave 15:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin^{-1}(x)}{x^2}\,dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sin^{-1}(x)}{x^2}\,dx = -\left[\frac{1}{x}\sin^{-1}(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(x)\right)dx\right]$$

og da

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sin^{-1}(x)}{x^2}\,dx = -\sin^{-1}(1) + 2\sin^{-1}(\frac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(x)\right)dx$$

for integralen

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(x)\right)dx$$

bruker vi substitusjonen

$$u = \sin^{-1}(x), \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{\sin(u)}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(x)\right),$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(x)\right)dx = \int_{\sin^{-1}(\frac{1}{2})}^{\sin^{-1}(1)} \frac{1}{\sin(u)}du = \ln|\csc(u) - \cot(u)|\Big|_{\sin^{-1}(\frac{1}{2})}^{\sin^{-1}(1)}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sin^{-1}(x)}{x^2}\,dx = -\sin^{-1}(1)+2\sin^{-1}(\frac{1}{2})+\ln|1-\cot(\sin^{-1}(1))|-\ln|2-\cot(\sin^{-1}(\frac{1}{2}))|$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

Integraler av rasjonale funksjoner

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

vi skal se at det er lettere å integrere når $\mathrm{grad}(P(x)) < \mathrm{grad}(Q(x))$.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

vi skal se at det er lettere å integrere når
$\mathrm{grad}(P(x)) < \mathrm{grad}(Q(x))$.
Hvis dette ikke er tilfellet prøve vi å skrive $P(x)$ som

$$P(x) = Q(x)\tilde{Q}(x) + R(x)$$

med $\tilde{Q}(x)$ og $R(x)$ to polynomer av grad mindre enn $\mathrm{grad}(P(x))$.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

vi skal se at det er lettere å integrere når
$\mathrm{grad}(P(x)) < \mathrm{grad}(Q(x))$.
Hvis dette ikke er tilfellet prøve vi å skrive $P(x)$ som

$$P(x) = Q(x)\tilde{Q}(x) + R(x)$$

med $\tilde{Q}(x)$ og $R(x)$ to polynomer av grad mindre enn $\mathrm{grad}(P(x))$.
Så

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \tilde{Q}(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

her er $\tilde{Q}(x)$ et polynom (dvs lett å integrere) og vi kan håpe for at $\frac{R(x)}{Q(x)}$ er slik at $\mathrm{grad}(R(x)) < \mathrm{grad}(Q(x))$ og også lett å integrere (i motsatt fall må vi repeterer prosedyren for $\frac{R(x)}{Q(x)}$).

Lineær eller kvedratisk $Q(x)$

- lineær

$$\int \frac{c}{ax+b}\,dx = \frac{c}{a}\ln|ax+b| + C$$

Lineær eller kvedratisk $Q(x)$

- lineær

$$\int \frac{c}{ax+b}\,dx = \frac{c}{a}\ln|ax+b| + C$$

- kvadratisk

1.
$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$$

2.
$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

3.
$$\int \frac{x}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C$$

4.
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C$$

La

$$Q(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdots (x - a_n),$$

med $a_1, a_2 \ldots, a_n$ reelle, og la $\mathrm{grad}(P) < \mathrm{grad}(Q)$ da $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kan delbrøkoppspaltes i formen

$$\frac{P(x)}{(x - a_1) \cdots (x - a_n)} = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x - a_n)}$$

der $A_1, \ldots, A_n$ er konstanter.

La

$$Q(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdots (x - a_n),$$

med $a_1, a_2 \ldots, a_n$ reelle, og la $\mathrm{grad}(P) < \mathrm{grad}(Q)$ da $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kan delbrøkoppspaltes i formen

$$\frac{P(x)}{(x - a_1)\cdots(x - a_n)} = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x - a_n)}$$

der $A_1, \ldots, A_n$ er konstanter.
Rasjonale funksjoner $\frac{P(x)}{Q(x)}$ med $\mathrm{grad}(P) < \mathrm{grad}(Q)$ kan delbrøkoppspaltes. Se **Teorem 1** Kap 6.2.

La

$$Q(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdots (x - a_n),$$

med $a_1, a_2 \ldots, a_n$ reelle, og la $\mathrm{grad}(P) < \mathrm{grad}(Q)$ da $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kan delbrøkoppspaltes i formen

$$\frac{P(x)}{(x - a_1) \cdots (x - a_n)} = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x - a_n)}$$

der $A_1, \ldots, A_n$ er konstanter.
Rasjonale funksjoner $\frac{P(x)}{Q(x)}$ med $\mathrm{grad}(P) < \mathrm{grad}(Q)$ kan delbrøkoppspaltes. Se **Teorem 1** Kap 6.2.
Merk: dette er nyttig for å integrere $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

$$\int \frac{1}{\cos(\theta)(1+\sin(\theta))}\,d\theta$$

løses ved substitusjon som fører til en rasjonalfunksjon og så delbørkoppspalting.
Substitusjon $x = \sin(\theta)$ gir

$$\int \frac{1}{\cos(\theta)(1+\sin(\theta))}\,d\theta = \int \frac{1}{(1-x^2)(1+x)}\,dx.$$

Vi delbøkoppspalter

$$\frac{1}{(1-x^2)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2}$$

og $A+B+C=1$, $2A-C=0$, $A-B=0$, og så $C=\frac{1}{2}$, $A=B=\frac{1}{4}$ og

$$\int \frac{1}{(1-x^2)(1+x)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-x}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\cos(\theta)(1+\sin(\theta))}\,d\theta = -\frac{1}{4}\ln|1-\sin(\theta)| + \frac{1}{4}\ln|1+\sin(\theta)| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\sin(\theta)} + C$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Type 1: når $a = -\infty$ eller $b = \infty$ eller begge deler.

$$A = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

- Type 2: når $f(x)$ er ikke begrenset når $x \to a$ eller $x \to b$.

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

La

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

og

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Hvis

$$\int_a^b g(x)dx$$

konvergerer da

$$\int_a^b f(x)dx$$

konvergerer og

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(Viceversa hvis $\int_a^b f(x)dx$ divergerer da $\int_a^b g(x)dx$ divergerer.)

Beregn

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx.$$

- Trapesmetode
- Simpsons metode
- Bruk av Taylorformel for approksimasjon av integraler

Trapesregel

Numerisk tilnærmelse av

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Bruk en partisjon av $[a, b]$ med ekvidistante noder:

$$a = x_0, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_n = a + n\,h = b, \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

anta at vi kan få take i verdiene

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$$

approksimer integralet på hver subintervall $[x_{i-1}, x_i]$ med integralet til en lineær tilnermelse til f:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

så ved å legge sammen bidragene får vi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

Trapesregel er en numerisk tilnærmelse av

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

gitt av

$$T_n = h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right)$$

Teorem 4

Hvis f er to ganger deriverbar med en kontinuerlig andre deriverte på $[a, b]$ og $|f''(x)| \leq K$ på $[a, b]$ da

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_n\right| \leq \frac{K(b-a)}{12}h^2 = \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

Numerisk tilnærmelse av

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Bruk en partisjon av $[a,b]$ med ekvidistante noder:

$$a = x_0, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \ldots, x_n = a + n\,h = b, \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

anta at vi kan få take i verdiene

$$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$$

n partall. Approksimer integralet på hver subintervall $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ for $j = 1, \ldots, \frac{n}{2}$, med integralet til en kvadratisk tilnermelse av f:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_{j-1}) + 4f(x_j) + f(x_{j+1})\right)$$

så ved å legge sammen bidragene får vi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x) \approx \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \left(f(x_{j-1}) + 4f(x_j) + f(x_{j+1})\right)$$

Simpsonsregel er en numerisk tilnærmelse av

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

der man lager en partisjon av $[a, b]$ med n ekvidistante noder og n er partall og slik at

$$S_n = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Teorem 5
Hvis f er fire ganger deriverbar med en kontinuerlig fiarde deriverte på $[a, b]$ og $|f^{(4)}(x)| \leq K$ på $[a, b]$ da

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \leq \frac{K(b-a)}{180}h^4 = \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

Eksempel 4
Betrakt integralet

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx$$

finn en tilnærmelse av integralet med en feil som er mindre enn 10^{-4}.
Løsning Vi bruker Taylorformel (Taylor-MacLaurin, en approksimasjon av e^x om $x = 0$)

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

der

$$E_n(x) = \frac{e^X}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad X \in (0, x)$$

Siden $0 \le X \le 1$ da $e^X \le e < 3$ og

$$|E_n(x)| \le \frac{3}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Bruk av Taylorformel for approksimasjon av integraler, kap. 6.8

Ved å erstatte x med x^2 i Taylorformel og å integrere på begge sider vi får

$$\int_0^1 e^x dx = \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}\right) dx + \int_0^1 E_n(x^2)dx$$

integralet på høyre siden er lett å beregne (integralet til en polynom) og vi tar den som en approksimasjon av integralet av e^{x^2}, vi får

$$\int_0^1 e^x dx = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)n!} + \int_0^1 E_n(x^2)dx$$

der $\int_0^1 E_n(x^2)dx$ er feilen (som skal da være mindre enn 10^{-4}) så

$$\left|\int_0^1 E_n(x^2)dx\right| \leq \frac{3}{(n+1)!} \int_0^1 x^{2(n+1)} dx = \frac{3}{(n+1)!(2n+3)}$$

nå må vi sørge for å ta n stor nok slik at

$$\frac{3}{(n+1)!(2n+3)} < 10^{-4}$$

dette skjer med $n = 6$.