

Integrasjon

Department of Mathematical Sciences, NTNU, Norway

October 14, 2014

- Summer
- Areal under grafen til en funksjon som grenseverdi til en summe

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \dots, n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

mener vi

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \dots, n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \dots, n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \dots, n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \dots, n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^3 \frac{1}{k+7}$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \dots, n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^3 \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} +$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \dots, n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^3 \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} +$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \dots, n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^3 \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} +$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \dots, n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^3 \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} +$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \dots, n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^3 \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} +$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \dots, n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^3 \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$



$$\sum_{i=m}^n (A f(i) + B g(i)) = A \sum_{i=m}^n f(i) + B \sum_{i=m}^n g(i)$$



$$\sum_{i=m}^n (A f(i) + B g(i)) = A \sum_{i=m}^n f(i) + B \sum_{i=m}^n g(i)$$



$$\sum_{j=m}^{m+n} f(j) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(m+n)$$



$$\sum_{i=m}^n (A f(i) + B g(i)) = A \sum_{i=m}^n f(i) + B \sum_{i=m}^n g(i)$$



$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{m+n} f(j) &= f(m) + f(m+1) + \cdots + f(m+n) \\ &= \sum_{i=0}^n f(i+m) \end{aligned}$$

Eksempel 3 Skriv $\sum_{j=3}^{17} \sqrt{1+j^2}$ i formen $\sum_{i=1}^n f(i)$. Hvis vi setter $j = i + 2$, da for $j = 3$ blir det $i = 1$ og for $j = 17$ blir det $i = 15$, so

$$\sum_{j=3}^{17} \sqrt{1+j^2} = \sum_{i=1}^{15} \sqrt{1+(i+2)^2}$$

1

$$\sum_{i=1}^n 1$$

1

$$\sum_{i=1}^n 1 = 1 + 1 + \cdots + 1$$

1

$$\sum_{i=1}^n 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

1

$$\sum_{i=1}^n 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

2

$$S = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bewis

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\ \hline 2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \end{array}$$

1

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2

$$\sum_{i=1}^n r^{i-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{hvis } r \neq 1.$$

Eksempel 4

$$\sum_{k=m+1}^n (6k^2 - 4k + 3), \quad 1 \leq m < n.$$

Kap 5.2. Arealer som grenvseverdier av summer

La f være en ikke-negativ kontinuerlig funksjon. Arealen under grafen $y = f(x)$ og mellom de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$, der $a < b$.

Del intervallet $[a, b]$ i n subintervaller

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

la

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Summen

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n$$

Kap 5.2. Arealer som grensverdier av summer

La f være en ikke-negativ kontinuerlig funksjon. Arealen under grafen $y = f(x)$ og mellom de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$, der $a < b$.

Del intervallet $[a, b]$ i n subintervaller

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

la

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Summen

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$$

er en tilnærming av arealen under grafen $y = f(x)$ og

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Kap 5.2. Arealer som grenvseverdier av summer

La f være en ikke-negativ kontinuerlig funksjon. Arealen under grafen $y = f(x)$ og mellom de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$, der $a < b$.

Del intervallet $[a, b]$ i n subintervaller

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

la

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Summen

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$$

er en tilnærmelse av arealen under grafen $y = f(x)$ og

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

(Show tutor in Maple) **Merk:** Noen ganger bruker man

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i}{n}(b-a), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Eksempel 1

Finn arealen til område under linjen $y = x + 1$, over x -aksen og mellom linjene $x = 0$ og $x = 2$.

Eksempel 1

Finn arealen til område under linjen $y = x + 1$, over x -aksen og mellom linjene $x = 0$ og $x = 2$.

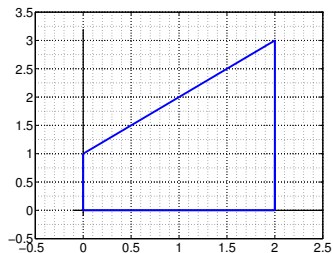


Figure : Approksimasjon av arealen.

Eksempel 1

Finn arealen til område under linjen $y = x + 1$, over x -aksen og mellom linjene $x = 0$ og $x = 2$.

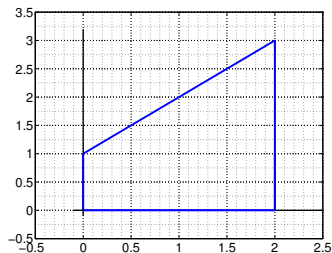


Figure : Approksimasjon av arealen.

$$y = x + 1, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{2}{n}, \quad x_2 = \frac{4}{n}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{2n}{n} = 2.$$
$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{2}{n} + 1, \quad y_2 = \frac{4}{n} + 1, \quad \dots, \quad y_n = 2 + 1$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n} + 1 \right) \frac{2}{n} \\ &= \frac{2}{n} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right] \\ &= \frac{2}{n} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right] \\ &= \frac{2}{n} \left[\frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{2} + n \right] \\ &= 2 \frac{n+1}{n} + 2 \end{aligned}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \frac{n+1}{n} + 2 \right) = 2 + 2 = 4$$

Eksempel 2

Finn arealen til område under grafen til $y = x^2$, og linjene $y = 0$, $x = 0$ og $x = b$, med $b > 0$.

Eksempel 2

Finn arealen til område under grafen til $y = x^2$, og linjene $y = 0$, $x = 0$ og $x = b$, med $b > 0$.

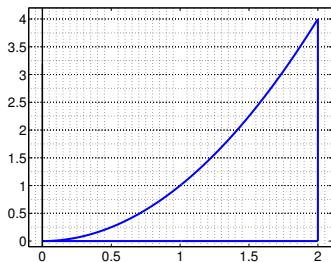


Figure : Approksimasjon av arealen.

Eksempel 2

Finn arealen til område under grafen til $y = x^2$, og linjene $y = 0$, $x = 0$ og $x = b$, med $b > 0$.

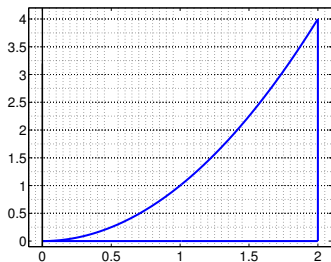


Figure : Approksimasjon av arealen.

$$y = x^2, \quad x_0 = 0, x_1 = \frac{b}{n}, x_2 = \frac{2b}{n}, \dots, x_n = \frac{bn}{n} = b.$$
$$y_0 = 0, y_1 = \frac{b^2}{n^2}, y_2 = \frac{4b^2}{n^2}, \dots, y_n = b^2$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{bi}{n}\right)^2 \frac{b}{n} \\ &= \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b^3 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \right) = \frac{b^3}{3}$$

Identifiser grenseverdien

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{n^2}$$

som en areal og evaluer den.

Løsning:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$$

intervaller har bredde $\frac{1}{n}$ og deler opp intervallet $[0, 1]$ vi har

$$x_i = i \frac{1}{n}, \quad y_i = 1 - x_i = f(x_i), \quad \Delta x = \frac{1}{n},$$

$$S_n = \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad f(x) = 1 - x$$

arealen under grafen $y = 1 - x$ og mellom linjene $y = 0$, $x = 0$ og $x = 1$.

Identifiser grenseverdien

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{n^2}$$

som en areal og evaluer den.

Løsning:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i \right] = \frac{1}{n} \left[n - \frac{n(n+1)}{2n} \right]$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$$

- Det bestemte integralet og egenskaper ved det bestemte integralet (linearitet, integraler av jevne og odde funksjoner)
- Middelveidsetning for integraler
- Fundamentalteorem med anvendelser og eksempler

Vi antar at f er definert på et lukket intervall $[a, b]$ og er kontinuerlig på intervallet, til å begynne med antar vi at $f \geq 0$.

Vi antar at f er definert på et lukket intervall $[a, b]$ og er kontinuerlig på intervallet, til å begynne med antar vi at $f \geq 0$. Gitt et intervall $[a, b]$ en partisjon av $[a, b]$ er en mengde som består av punkter til $[a, b]$:

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

slik at

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Vi antar at f er definert på et lukket intervall $[a, b]$ og er kontinuerlig på intervallet, til å begynne med antar vi at $f \geq 0$. Gitt et intervall $[a, b]$ en partisjon av $[a, b]$ er en mengde som består av punkter til $[a, b]$:

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

slik at

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

og vi lar $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ for $i = 1, \dots, n$.

Vi antar at f er definert på et lukket intervall $[a, b]$ og er kontinuerlig på intervallet, til å begynne med antar vi at $f \geq 0$. Gitt et intervall $[a, b]$ en partisjon av $[a, b]$ er en mengde som består av punkter til $[a, b]$:

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

slik at

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

og vi lar $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ for $i = 1, \dots, n$.

f er kontinuerlig på hver subintervall $[x_{i-1}, x_i]$ da **ekstremalverdisetning** (kap. 1.4) garanterer at det finnes $l_i \in [x_{i-1}, x_i]$ og $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ slik at

$$f(l_i) \leq f(x) \leq f(u_i), \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Vi antar at f er definert på et lukket intervall $[a, b]$ og er kontinuerlig på intervallet, til å begynne med antar vi at $f \geq 0$. Gitt et intervall $[a, b]$ en partisjon av $[a, b]$ er en mengde som består av punkter til $[a, b]$:

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

slik at

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

og vi lar $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ for $i = 1, \dots, n$.

f er kontinuerlig på hver subintervall $[x_{i-1}, x_i]$ da **ekstremalverdisetning** (kap. 1.4) garanterer at det finnes $l_i \in [x_{i-1}, x_i]$ og $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ slik at

$$f(l_i) \leq f(x) \leq f(u_i), \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

da arealen A_i under grafen til f på intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ tilfredstiller

$$f(l_i)\Delta x_i \leq A_i \leq f(u_i)\Delta x_i$$

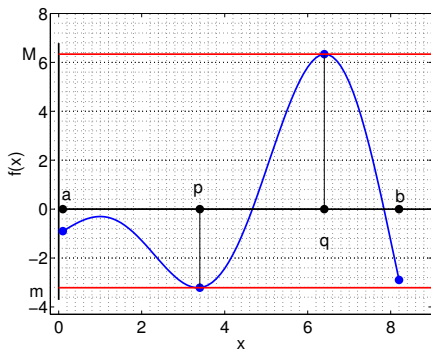
Husk: Teorem 8, kap 1.4: ekstremalverdisetning (Min-max)

Hvis f er kontinuertlig på $[x_{i-1}, x_i]$ finnes det tall l_i og u_i slik at for alle $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$m = f(l_i) \leq f(x) \leq f(u_i) = M.$$

m minimumverdi

M maximumverdi



Nedre Riemann sum for funksjonen f og partisjonen P

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n f(l_i) \Delta x_i$$

Ovre Riemann sum for funksjonen f og partisjonen P

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n f(u_i) \Delta x_i$$

Eksempel 1: Finn ovre og nedre Riemann sum for $f(x) = \frac{1}{x}$ på intervallet $[1, 2]$ med en partisjon i fire subintervaller av samme lengde.

Eksempel 2: Finn ovre og nedre Riemann sum for $f(x) = x^2$ på intervallet $[0, a]$ med en partisjon i n subintervaller av samme lengde.

Det bestemte integralet

Vi vil nå ta finere og finere partisjoner slik at, i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$, blir avviken mellom arealen A_i under grafen til f og arealene til rektanglene $f(l_i)\Delta x_i$ og $f(u_i)\Delta x_i$ mindre og mindre.

Vi vil nå ta finere og finere partisjoner slik at, i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$, blir avviket mellom arealen A_i under grafen til f og arealene til rektanglene $f(l_i)\Delta x_i$ og $f(u_i)\Delta x_i$ mindre og mindre.

For en hver utvalgt partisjon P vi har

$$L(f, P) \leq U(f, P)$$

og da (av komplettheten av de reelle tall) må det finnes minst et tall I slik at

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P).$$

Det bestemte integralet

Vi vil nå ta finere og finere partisjoner slik at, i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$, blir avviket mellom arealen A_i under grafen til f og arealene til rektanglene $f(l_i)\Delta x_i$ og $f(u_i)\Delta x_i$ mindre og mindre.

For en hver utvalgt partisjon P vi har

$$L(f, P) \leq U(f, P)$$

og da (av komplettheten av de reelle tall) må det finnes minst et tall I slik at

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P).$$

Definisjon Anta at det finnes nøyaktig et tall I slik at for en hver partisjon P av intervallet $[a, b]$ vi har

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$$

da sier vi at f er integrerbar og at I er **det bestemte integralet** til f i $[a, b]$.

Det bestemte integralet

Vi vil nå ta finere og finere partisjoner slik at, i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$, blir avviket mellom arealen A_i under grafen til f og arealene til rektanglene $f(l_i)\Delta x_i$ og $f(u_i)\Delta x_i$ mindre og mindre.

For en hver utvalgt partisjon P vi har

$$L(f, P) \leq U(f, P)$$

og da (av komplettheten av de reelle tall) må det finnes minst et tall I slik at

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P).$$

Definisjon Anta at det finnes nøyaktig et tall I slik at for en hver partisjon P av intervallet $[a, b]$ vi har

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$$

da sier vi at f er integrerbar og at I er **det bestemte integralet** til f i $[a, b]$. Vi skriver

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Eksempel 3

Vis at $f(x) = x^2$ er integrerbar på intervallet $[0, a]$ der $a > 0$, finn $\int_0^a x^2 dx$.

Løsning

Vi ser på grenseversider for $n \rightarrow \infty$ av nedre og ovre Riemann summer for f over $[0, a]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n^3 - 3n + n)a^3}{6n^3} = \frac{a^3}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)a^3}{6n^2} = \frac{a^3}{3}$$

da

$$L(f, P_n) \leq \frac{a^3}{3} \leq U(f, P_n).$$

Merk nå at for en hver P (uansett hvor fin den er) finnes det n^* stor nok slik at P_{n^*} er finere enn P , dette betyr at

$$L(f, P) \leq L(f, P_{n^*}) \leq \frac{a^3}{3} \leq U(f, P_{n^*}) \leq U(f, P),$$

og da er $\frac{a^3}{3}$ det bestemte integralet av f på $[0, a]$, $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$.

Vi har begrenset oss til å tenke på ikke negative funksjoner men alt kan generaliseres til funksjoner som ikke er positive eller som skifter fortegn på $[a, b]$.

Vi har begrenset oss til å tenke på ikke negative funksjoner men alt kan generaliseres til funksjoner som ikke er positive eller som skifter fortegn på $[a, b]$.

- For ikke positive funksjoner, rektanglene til ovre og nedre Riemann summer får negative arealer.

Vi har begrenset oss til å tenke på ikke negative funksjoner men alt kan generaliseres til funksjoner som ikke er positive eller som skifter fortegn på $[a, b]$.

- For ikke positive funksjoner, rektanglene til ovre og nedre Riemann summer får negative arealer.
- For funksjoner som skifter fortegn alt fungerer som før men det lønner seg å finne der funksjonen skjærer x -aksen, og dele $[a, b]$ i subintervaller der f er enten ikke negativ eller ikke positiv, og så jobbe separat med de forskjellige delene av f .

Vi har begrenset oss til å tenke på ikke negative funksjoner men alt kan generaliseres til funksjoner som ikke er positive eller som skifter fortegn på $[a, b]$.

- For ikke positive funksjoner, rektanglene til ovre og nedre Riemann summer får negative arealer.
- For funksjoner som skifter fortegn alt fungerer som før men det lønner seg å finne der funksjonen skjærer x -aksen, og dele $[a, b]$ i subintervaller der f er enten ikke negativ eller ikke positiv, og så jobbe separat med de forskjellige delene av f .

Teorem 2

Alle kontinuerlige funksjoner på $[a, b]$ er integrerbare.



$$\int_a^a f(x) dx = 0$$



$$\int_a^a f(x) dx = 0$$



$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$



$$\int_a^a f(x) dx = 0$$



$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$



$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x)) dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx$$



$$\int_a^a f(x) dx = 0$$



$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$



$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x)) dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx$$



$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

- Hvis $a \leq b$ og $f(x) \leq g(x)$ på $[a, b]$ da

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

- Hvis $a \leq b$ og $f(x) \leq g(x)$ på $[a, b]$ da

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

-

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

- Hvis $a \leq b$ og $f(x) \leq g(x)$ på $[a, b]$ da

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

-

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

- For odde funksjoner (dvs funksjoner slik at $f(-x) = -f(x)$) vi har

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

- Hvis $a \leq b$ og $f(x) \leq g(x)$ på $[a, b]$ da

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

-

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

- For odde funksjoner (dvs funksjoner slik at $f(-x) = -f(x)$) vi har

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

- For like funksjoner (dvs $f(x) = f(-x)$)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

- Egenskaper med det bestemte integralet.
- Analysens fundamentalteorem
- Substitusjon
- Arealet mellom to kurver ved bruk av integralet

- For odde funksjoner (dvs funksjoner slik at $f(-x) = -f(x)$) vi har

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

- For odde funksjoner (dvs funksjoner slik at $f(-x) = -f(x)$) vi har

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

- For like funksjoner (dvs $f(x) = f(-x)$)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

La f være kontinuertlig på $[a, b]$ da finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c)$$

La f være kontinuerlig på et intervall I som inneholder punktet a . Betrakt

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

da er F deriverbar på intervallet I og

$$F'(x) = f(x)$$

La f være kontinuerlig på et intervall I som inneholder punktet a . Betrakt

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

da er F deriverbar på intervallet I og

$$F'(x) = f(x)$$

Bevis

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(c) h \quad c = c(h) \\ &= \lim_{c \rightarrow x} f(c) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

La f være kontinuerlig på et intervall som inneholder punktet a .

La G være en funksjon slik at $G'(x) = f(x)$ (antideriverte til f) da

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

La f være kontinuerlig på et intervall som inneholder punktet a .

La G være en funksjon slik at $G'(x) = f(x)$ (antideriverte til f) da

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Bevis

Siden $G'(x) = f(x)$ and also $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ da må det vare

$$\int_a^x f(t) dt = G(x) + C$$

$$\int_a^a f(t) dt = 0 = G(a) + C, \Rightarrow C = -G(a)$$

og så

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) + C = G(b) - G(a)$$

1 Finn verdien av integralet $\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 2) dx$.

Siden $\frac{d}{dx} (\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x) = x^2 - 3x + 2$ ved
fundamentalteoremet del 2 vi har

$$\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 2) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{3}8 - \frac{3}{2}4 + 4 + \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 2 \right) = \frac{9}{2}$$

2 Finn arealen under kurven $y = \sin(x)$, over $y = 0$ fra $x = 0$ til $x = \pi$.

$$A = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = -(-1 - (1)) = 2.$$

3 Finn snittverdi av $f(x) = e^{-x} + \cos(x)$ på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, 0]$.

$$\bar{f} = \frac{1}{0 - (-\frac{\pi}{2})} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (e^{-x} + \cos(x)) dx = \frac{2}{\pi} (-e^{-x} + \sin(x)) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{2}{\pi} e^{\frac{\pi}{2}}$$

Husk kjærnerregel

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t)$$

ved fundamentalteoremet (del 2) vi får

$$\int_a^b f'(g(t))g'(t) dt = f(g(b)) - f(g(a))$$

hvis $A = g(a)$ og $B = g(b)$ vi kan skrive

$$\int_a^b f'(g(t))g'(t) dt = f(B) - f(A) = \int_A^B f'(u) du$$

Oppgave 45 Finn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos(x)} dx.$$

Løsning Vi skal bruke at $1 + \cos(x) = 2 \cos^2(\frac{x}{2})$ og

$$\int_a^b f'(g(x)) g'(x) dx = f(g(b)) - f(g(a)).$$

Ved hjelp av $1 + \cos(x) = 2 \cos^2(\frac{x}{2})$ vi får

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos(x)} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx,$$

la

$$g(x) = \frac{x}{2}, \quad g'(x) = \frac{1}{2}, \quad f'(u) = \cos(u), \quad f(u) = \sin(u)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos(x)} dx &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} dx = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(g(x)) g'(x) dx = \\ &= 2\sqrt{2} (f(g(\frac{\pi}{2})) - f(g(0))) = 2\sqrt{2} (\sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(0)) \end{aligned}$$

Oppgave 45 Finn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos(x)} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx,$$

Løsning Vi kan bruke substitusjon på en litt annen måte ved å definere $A = g(a)$ og $B = g(b)$ og så bruke

$$\int_a^b f'(g(x)) g'(x) dt = f(B) - f(A) = \int_A^B f'(u) du.$$

Som før tar vi

$$g(x) = \frac{x}{2}, \quad g'(x) = \frac{1}{2}, \quad f'(u) = \cos(u), \quad f(u) = \sin(u)$$

da $A = \frac{0}{2} = 0$ og $B = \frac{\pi}{4}$ vi bruker formelen i rekkefølgen

$$\int_a^b f'(g(x)) g'(x) dt = \int_A^B f'(u) du = f(B) - f(A)$$

dette gir

$$2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} dx = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(u) du = 2\sqrt{2}(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0)) = 2.$$

Oppgave 18 Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Løsning Dette betyr at vi skal finne den antideriverte av funksjonen og legge til en konstant. Ved hjelp av fundamentalteorem del 1 den antideriverte er

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{e^t + e^{-t}}, \quad \text{og} \quad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = F(x) + C.$$

Vi nå bruker substitusjon for å finne $F(u)$ og

$$F(u) = \int_a^u f'(g(x)) g'(x) dx = f(g(u)) - f(g(a)).$$

Vi prøver med

$$g(x) = e^x, \quad g'(x) = e^x, \quad f'(y) = \frac{1}{y^2 + 1}, \quad f(y) = \arctan(y)$$

$$F(u) = \int_a^u \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_a^u f'(g(x)) g'(x) dx = \int_a^u \frac{e^x dx}{(e^{2x} + 1)} = \arctan(e^u) - \arctan(e^a),$$

og

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \arctan(e^x) + C$$

Eksempler, litt annerledes bruk av substitusjon

Oppgave 18 Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Løsning Dette betyr at vi skal finne den antideriverte av funksjonen og legge til en konstant. Ved hjelp av fundamentalteorem del 1 den antideriverte er

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{e^t + e^{-t}}, \quad \text{og} \quad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = F(x) + C.$$

Vi nå bruker substitusjon for å finne $F(u)$ og vi bruker som før

$$g(x) = e^x, \quad g'(x) = e^x, \quad f'(y) = \frac{1}{y^2 + 1}, \quad f(y) = \arctan(y)$$

og ved å definere $A = g(a) = e^a$ og $U = g(u) = e^u$ og så bruke

$$F(u) = \int_a^u \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_a^u \frac{e^x dx}{((e^x)^2 + 1)} = \int_a^u f'(g(x)) g'(x) dx = \int_A^U f'(y) dy = f(U) - f(A).$$

$$F(u) = \int_A^U \frac{1}{y^2 + 1} dy = \arctan(U) - \arctan(A) = \arctan(e^u) - \arctan(e^a),$$

og så

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \arctan(e^x) + C$$

Eksempel 2

Finn arealen av området omringet av kurvene $y = x^2 - 2x$ og $y = 4 - x^2$.

Eksempel 3

Finn arealen av området som ligger mellom kurven $y = \sin(x)$ og $y = \cos(x)$ fra $x = 0$ til $x = 2\pi$.

Eksempel 4

Finn arealen av område som ligger på høyre siden av parabellen $x = y^2 - 12$ og til venstre for linjen $y = x$