Integrasjon

Department of Mathematical Sciences, NTNU, Norway

October 13, 2014

- Summer
- Areal under grafen til en funksjon som grenseverdi til en summe

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \ldots n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

mener vi

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \ldots n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

Sigma notasjon

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \ldots n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \ldots n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \ldots n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7}$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \ldots n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} +$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \ldots n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} +$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \ldots n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} +$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \ldots n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} +$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \ldots n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} +$$

La m og n være heltall og $m \leq n$ og la f være en funksjon definert på heltallene $m, m+1, \ldots n$. Da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

mener vi

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

m lower limit, n upper limit of summation.

Eksempel 1

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Eksempel 2

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

Egenskaper med summer

- $$\sum_{i=m}^{n} (A\,f(i) + B\,g(i)) = A\sum_{i=m}^{n} f(i) + B\sum_{i=m}^{n} g(i)$$

Egenskaper med summer

- $$\sum_{i=m}^{n} (A\,f(i) + B\,g(i)) = A\sum_{i=m}^{n} f(i) + B\sum_{i=m}^{n} g(i)$$

- $$\sum_{j=m}^{m+n} f(j) \quad = \quad f(m) + f(m+1) + \cdots + f(m+n)$$

- $$\sum_{i=m}^{n}(A\,f(i)+B\,g(i)) = A\sum_{i=m}^{n} f(i) + B\sum_{i=m}^{n} g(i)$$

- $$\begin{aligned}\sum_{j=m}^{m+n} f(j) &= f(m)+f(m+1)+\cdots+f(m+n)\\ &= \sum_{i=0}^{n} f(i+m)\end{aligned}$$

Eksempel 3 Skriv $\sum_{j=3}^{17}\sqrt{1+j^2}$ i formen $\sum_{i=1}^{n} f(i)$. Hvis vi setter $j=i+2$, da for $j=3$ blir det $i=1$ og for $j=17$ blir det $i=15$, so

$$\textstyle\sum_{j=3}^{17}\sqrt{1+j^2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{15}\sqrt{1+(i+2)^2}$$

1

$$\sum_{i=1}^{n} 1$$

1

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1$$

1

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

1

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

2

$$S = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bevis

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

1

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2

$$\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{hvis } r \neq 1.$$

Eksempel 4

$$\sum_{k=m+1}^{n} (6k^2 - 4k + 3), \quad 1 \leq m < n.$$

La f være en ikke-negativ kontinuerlig funksjon. Arealen under grafen $y = f(x)$ og mellom de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$, der $a < b$. Del intervallet $[a, b]$ i n subintervaller

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

la

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Summen

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n$$

La f være en ikke-negativ kontinuerlig funksjon. Arealen under grafen $y = f(x)$ og mellom de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$, der $a < b$.
Del intervallet $[a, b]$ i n subintervaller

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

la

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Summen

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

er en tilnærmelse av arealen under grafen $y = f(x)$ og

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

La f være en ikke-negativ kontinuerlig funksjon. Arealen under grafen $y = f(x)$ og mellom de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$, der $a < b$.
Del intervallet $[a, b]$ i n subintervaller

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

la

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Summen

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

er en tilnærmelse av arealen under grafen $y = f(x)$ og

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

(Show tutor in Maple) **Merk**: Noen ganger bruker man

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i}{n}(b-a), \quad 0 \le i \le n.$$

Eksempel 1

Finn arealen til område under linjen $y = x + 1$, over x-aksen og mellom linjene $x = 0$ og $x = 2$.

Finn arealen til område under linjen $y = x + 1$, over x-aksen og mellom linjene $x = 0$ og $x = 2$.

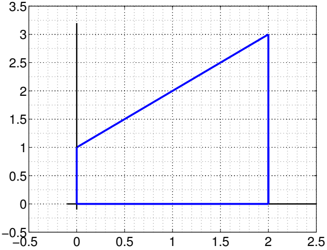


Figure : Approksimasjon av arealen.

Finn arealen til område under linjen $y = x + 1$, over x-aksen og mellom linjene $x = 0$ og $x = 2$.

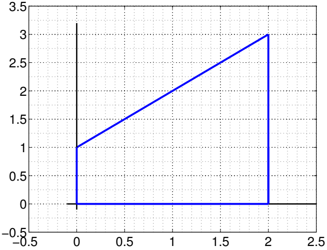


Figure : Approksimasjon av arealen.

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{2}{n}, \quad x_2 = \frac{4}{n}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{2n}{n} = 2.$$

$$y = x + 1, \qquad y_0 = 1,\ y_1 = \frac{2}{n} + 1,\ y_2 = \frac{4}{n} + 1, \dots, y_n = 2 + 1$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n} + 1 \right) \frac{2}{n} \\
&= \frac{2}{n} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right] \\
&= \frac{2}{n} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right] \\
&= \frac{2}{n} \left[\frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{2} + n \right] \\
&= 2 \frac{n+1}{n} + 2
\end{aligned}
$$

$$A = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(2 \frac{n+1}{n} + 2 \right) = 2 + 2 = 4$$

Finn arealen til område under grafen til $y = x^2$, og linjene $y = 0$, $x = 0$ og $x = b$, med $b > 0$.

Eksempel 2

Finn arealen til område under grafen til $y = x^2$, og linjene $y = 0$, $x = 0$ og $x = b$, med $b > 0$.

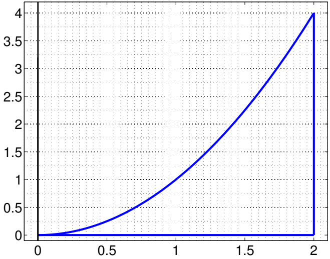


Figure : Approksimasjon av arealen.

Finn arealen til område under grafen til $y = x^2$, og linjene $y = 0$, $x = 0$ og $x = b$, med $b > 0$.

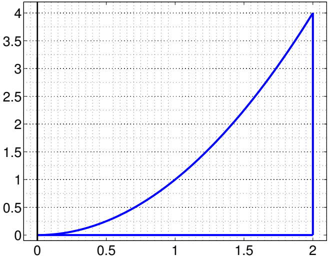


Figure : Approksimasjon av arealen.

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{b}{n}, \quad x_2 = \frac{2b}{n}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{bn}{n} = b.$$

$$y = x^2, \qquad y_0 = 0,\ y_1 = \frac{b^2}{n^2},\ y_2 = \frac{4b^2}{n^2}, \ldots, y_n = b^2$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b\, i}{n} \right)^2 \frac{b}{n} \\ &= \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(b^3 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \right) = \frac{b^3}{3}$$

Identifiser grenseverdien

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n^2}$$

som en areal og evaluer den.
Løsning:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$$

intervaller har bredde $\frac{1}{n}$ og deler opp intervallet $[0,1]$ vi har

$$x_i = i\,\frac{1}{n}, \qquad y_i = 1 - x_i = f(x_i), \quad \Delta x = \frac{1}{n},$$

$$S_n = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i), \quad f(x) = 1 - x$$

arealen under grafen $y = 1 - x$ og mellom linjene $y = 0$, $x = 0$ og $x = 1$.

Identifiser grenseverdien

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n^2}$$

som en areal og evaluer den.
Løsning:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i\right] = \frac{1}{n} \left[n - \frac{n(n+1)}{2n}\right]$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

- Det bestemte integralet og egenskaper ved det bestemte integralet (linearitet, integraler av jevne og odde funksjoner)
- Middelverdisetning for integraler
- Fundamentalteorem med anvendelser og eksempler

Vi antar at f er definert på et lukket intervall $[a, b]$ og er kontinuerlig på intervallet, til å beginne med antar vi at $f \geq 0$.

Vi antar at f er definert på et lukket intervall $[a, b]$ og er kontinuerlig på intervallet, til å beginne med antar vi at $f \geq 0$. Gitt et intervall $[a, b]$ en partisjon av $[a, b]$ er en mengde som består av punkter til $[a.b]$:

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

slik at

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Vi antar at f er definert på et lukket intervall $[a, b]$ og er kontinuerlig på intervallet, til å beginne med antar vi at $f \geq 0$. Gitt et intervall $[a, b]$ en partisjon av $[a, b]$ er en mengde som består av punkter til $[a.b]$:

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

slik at

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

og vi lar $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ for $i = 1, \dots, n$.

Vi antar at f er definert på et lukket intervall $[a, b]$ og er kontinuerlig på intervallet, til å beginne med antar vi at $f \geq 0$.
Gitt et intervall $[a, b]$ en partisjon av $[a, b]$ er en mengde som består av punkter til $[a.b]$:

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

slik at

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

og vi lar $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ for $i = 1, \ldots, n$.
f er kontinuerlig på hver subintervall $[x_{i-1}, x_i]$ da **ekstremalverdisetning** (kap. 1.4) garanterer at det finnes $l_i \in [x_{i-1}, x_i]$ og $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ slik at

$$f(l_i) \leq f(x) \leq f(u_i), \qquad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Vi antar at f er definert på et lukket intervall $[a, b]$ og er kontinuerlig på intervallet, til å beginne med antar vi at $f \geq 0$.
Gitt et intervall $[a, b]$ en partisjon av $[a, b]$ er en mengde som består av punkter til $[a.b]$:

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

slik at

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

og vi lar $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ for $i = 1, \ldots, n$.
f er kontinuerlig på hver subintervall $[x_{i-1}, x_i]$ da **ekstremalverdisetning** (kap. 1.4) garanterer at det finnes $l_i \in [x_{i-1}, x_i]$ og $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ slik at

$$f(l_i) \leq f(x) \leq f(u_i), \qquad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

da arealen A_i under grafen til f på intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ tilfredstiller

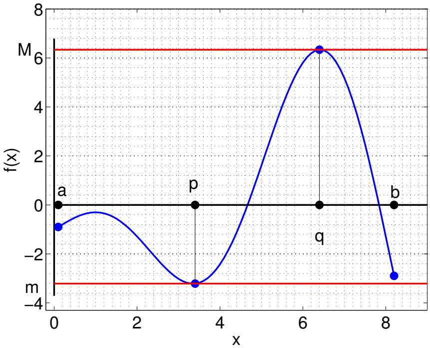
$$f(l_i)\Delta x_i \leq A_i \leq f(u_i)\Delta x_i$$

Hvis f er kontinuerlig på $[x_{i-1}, x_i]$ finnes det tall l_i og u_i slik at for alle $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$m = f(l_i) \leq f(x) \leq f(u_i) = M.$$

m minimumverdi

M maximumverdi



Nedre Riemann sum for funksjonen f og partisjonen P

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$$

Ovre Riemann sum for funksjonen f og partisjonen P

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$$

Eksempel 1: Finn ovre og nedre Riemann sum for $f(x) = \frac{1}{x}$ på intervallet $[1,2]$ med en partisjon i fire subintervaller av samme lengde.

Eksempel 2: Finn ovre og nedre Riemann sum for $f(x) = x^2$ på intervallet $[0,a]$ med en partisjon i n subintervaller av samme lengde.

Vi vil nå ta finere og finere partisjoner slik at, i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$, blir avviken mellom arealen A_i under grafen til f og arealene til rektanglene $f(l_i)\Delta x_i$ og $f(u_i)\Delta x_i$ mindre og mindre.

Det bestemte integralet

Vi vil nå ta finere og finere partisjoner slik at, i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$, blir avviken mellom arealen A_i under grafen til f og arealene til rektanglene $f(l_i)\Delta x_i$ og $f(u_i)\Delta x_i$ mindre og mindre.
For en hver utvalgt partisjon P vi har

$$L(f, P) \leq U(f, P)$$

og da (av kompletheten av de reelle tall) må det finnes minst et tall I slik at

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P).$$

Vi vil nå ta finere og finere partisjoner slik at, i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$, blir avviken mellom arealen A_i under grafen til f og arealene til rektanglene $f(l_i)\Delta x_i$ og $f(u_i)\Delta x_i$ mindre og mindre.
For en hver utvalgt partisjon P vi har

$$L(f, P) \leq U(f, P)$$

og da (av komplettheten av de reelle tall) må det finnes minst et tall I slik at

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P).$$

Definisjon Anta at det finnes nøyaktig et tall I slik at for en hver partisjon P av intervallet $[a, b]$ vi har

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$$

da sier vi at f er integrerbar og at I er **det bestemte integralet** til f i $[a, b]$.

Vi vil nå ta finere og finere partisjoner slik at, i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$, blir avviken mellom arealen A_i under grafen til f og arealene til rektanglene $f(l_i)\Delta x_i$ og $f(u_i)\Delta x_i$ mindre og mindre.
For en hver utvalgt partisjon P vi har

$$L(f, P) \leq U(f, P)$$

og da (av komplettheten av de reelle tall) må det finnes minst et tall I slik at

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P).$$

Definisjon Anta at det finnes nøyaktig et tall I slik at for en hver partisjon P av intervallet $[a, b]$ vi har

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$$

da sier vi at f er integrerbar og at I er **det bestemte integralet** til f i $[a, b]$. Vi skriver

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Eksempel 3

Vis at $f(x) = x^2$ er integrerbar på intervallet $[0, a]$ der $a > 0$, finn $\int_0^a x^2\,dx$.

Løsning

Vi ser på grenseversider for $n \to \infty$ av nedre og ovre Riemann summer for f over $[0, a]$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{((2n^3 - 3n + n)a^3}{6n^3} = \frac{a^3}{3} \\
\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)a^3}{6n^2} = \frac{a^3}{3}
\end{aligned}$$

da

$$L(f, P_n) \leq \frac{a^3}{3} \leq U(f, P_n).$$

Merk nå at for en hver P (uansett hvor fin den er) finnes det n^* stor nok slik at P_{n^*} er finere enn P, dette betyr at

$$L(f, P) \leq L(f, P_{n^*}) \leq \frac{a^3}{3} \leq U(f, P_{n^*}) \leq U(f, P),$$

og da er $\frac{a^3}{3}$ det bestemte integralet av f på $[0, a]$, $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$.

Vi har begrenset oss til å tenke på ikke negative funksjoner men alt kan generaliseres til funksjoner som ikke er positive eller som skifter frotegn på $[a, b]$.

Vi har begrenset oss til å tenke på ikke negative funksjoner men alt kan generaliseres til funksjoner som ikke er positive eller som skifter frotegn på $[a, b]$.

- For ikke positive funksjoner, rektanglene til ovre og nedre Riemann summer får negative arealer.

Vi har begrenset oss til å tenke på ikke negative funksjoner men alt kan generaliseres til funksjoner som ikke er positive eller som skifter frotegn på $[a, b]$.

- For ikke positive funksjoner, rektanglene til ovre og nedre Riemann summer får negative arealer.
- For funksjoner som skifter fortegn alt fungerer som før men det lønner seg å finne der funskjonen sjkærer x-aksen, og dele $[a, b]$ i subintervaller der f er enten ikke negativ eller ikke positiv, og så jobbe separat med de foskjellige delene av f.

Vi har begrenset oss til å tenke på ikke negative funksjoner men alt kan generaliseres til funksjoner som ikke er positive eller som skifter frotegn på $[a, b]$.

- For ikke positive funksjoner, rektanglene til ovre og nedre Riemann summer får negative arealer.
- For funksjoner som skifter fortegn alt fungerer som før men det lønner seg å finne der funskjonen sjkærer x-aksen, og dele $[a, b]$ i subintervaller der f er enten ikke negativ eller ikke positiv, og så jobbe separat med de foskjellige delene av f.

Teorem 2

Alle kontinuerlige funksjoner på $[a, b]$ er integrerbare.

Egenskaper med det bestemte integralet

- $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Egenskaper med det bestemte integralet

- $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Egenskaper med det bestemte integralet

- $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- $$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\, dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$$

Egenskaper med det bestemte integralet

- $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- $$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\,dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$$

- $$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

- Hvis $a \leq b$ og $f(x) \leq g(x)$ på $[a, b]$ da

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

- Hvis $a \leq b$ og $f(x) \leq g(x)$ på $[a, b]$ da

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

-

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

- Hvis $a \leq b$ og $f(x) \leq g(x)$ på $[a, b]$ da
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$
- $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$
- For odde funksjoner (dvs funksjoner slik at $f(-x) = -f(x)$) vi har
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

- Hvis $a \leq b$ og $f(x) \leq g(x)$ på $[a, b]$ da

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

-

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

- For odde funksjoner (dvs funksjoner slik at $f(-x) = -f(x)$) vi har

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

- For like funksjoner (dvs $f(x) = f(-x)$)

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

- Egenskaper med det bestemte integralet.
- Analysens fundamentalteorem
- Substitusjon
- Arealet mellom to kurver ved bruk av integralet

- For odde funksjoner (dvs funksjoner slik at $f(-x) = -f(x)$) vi har

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

- For odde funksjoner (dvs funksjoner slik at $f(-x) = -f(x)$) vi har

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

- For like funksjoner (dvs $f(x) = f(-x)$)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

La f være kontinuerlig på $[a, b]$ da finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c)$$

Fundamentalteoremet: del I

La f være kontinuerlig på et intervall I som innholder punktet a. Betrakt

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

da er F deriverbar på intervallet I og

$$F'(x) = f(x)$$

La f være kontinuerlig på et intervall I som innholder punktet a. Betrakt

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

da er F deriverbar på intervallet I og

$$F'(x) = f(x)$$

Bevis

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} f(c)\, h \qquad c = c(h) \\
&= \lim_{c\to x} f(c) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

La f være kontinuerlig på et intervall som innholder punktet a.
La G være en funksjon slik at $G'(x) = f(x)$ (antideriverte til f) da

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

La f være kontinuerlig på et intervall som innholder punktet a.
La G være en funksjon slik at $G'(x) = f(x)$ (antideriverte til f) da

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Bevis

Siden $G'(x) = f(x)$ and also $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ da må det vare

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) + C$$

$$\int_a^a f(t)dt = 0 = G(a) + C, \Rightarrow C = -G(a)$$

og så

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) + C = G(b) - G(a)$$

1. Finn verdien av integralet $\int_{-1}^{2}(x^2-3x+2)dx$.
   Siden $\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x)=x^2-3x+2$ ved fundamentalteoremet del 2 vi har
   $$\int_{-1}^{2}(x^2-3x+2)dx=(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x)\Big|_{-1}^{2}=\frac{1}{3}8-\frac{3}{2}4+4+(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+2)=\frac{9}{2}$$

2. Finn arealen under kurven $y=\sin(x)$, over $y=0$ fra $x=0$ til $x=\pi$.
   $$A=\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx=-\cos(x)|_0^{\pi}=-(-1-(1))=2.$$

3. Finn snittverdi av $f(x)=e^{-x}+\cos(x)$ på intevallet $[-\frac{\pi}{2},0]$.
   $$\bar{f}=\frac{1}{0-(-\frac{\pi}{2})}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(e^{-x}+\cos(x))\,dx=\frac{2}{\pi}\,(-e^{-x}+\sin(x))|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}}$$

Husk kjærneregel

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t))\, g'(t)$$

ved fundamentalteoremet (del 2) vi får

$$\int_a^b f'(g(t))\, g'(t)\, dt = f(g(b)) - f(g(a))$$

hvis $A = g(a)$ og $B = g(b)$ vi kan skrive

$$\int_a^b f'(g(t))\, g'(t)\, dt = f(B) - f(A) = \int_A^B f'(u)\, du$$

Oppgave 45 Finn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(x)}dx.$$

Løsning Vi skal bruke at $1+\cos(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$ og

$$\int_a^b f'(g(x))\,g'(x)\,dx = f(g(b)) - f(g(a)).$$

Ved hjelp av $1+\cos(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$ vi får

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(x)}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{2})\,dx,$$

la

$$g(x) = \frac{x}{2}, \qquad g'(x) = \frac{1}{2}, \qquad f'(u) = \cos(u), \qquad f(u) = \sin(u)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(x)}dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{2})\frac{1}{2}\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(g(x))\,g'(x)\,dx =$$

$$= 2\sqrt{2}(f(g(\frac{\pi}{2})) - f(g(0))) = 2\sqrt{2}(\sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(0))$$

Oppgave 45 Finn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(x)}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{2})\,dx,$$

Løsning Vi kan bruke substitusjon på en litt annen måte ved å definere $A = g(a)$ og $B = g(b)$ og så bruke

$$\int_a^b f'(g(x))\,g'(x)\,dt = f(B) - f(A) = \int_A^B f'(u)\,du.$$

Som før tar vi

$$g(x) = \frac{x}{2}, \qquad g'(x) = \frac{1}{2}, \qquad f'(u) = \cos(u), \qquad f(u) = \sin(u)$$

da $A = \frac{0}{2} = 0$ og $B = \frac{\pi}{4}$ vi bruker formelen i rekkefølgen

$$\int_a^b f'(g(x))\,g'(x)\,dt = \int_A^B f'(u)\,du = f(B) - f(A)$$

dette gir

$$2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{2})\,\frac{1}{2}\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(u)\,du = 2\sqrt{2}(\sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(0)) = 2.$$

Oppgave 18 Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Løsning Dette betyr at vi skal finne den antideriverte av funksjonen og legge til en konstant. Ved hjelp av fundamentalteorem del 1 den antideriverte er

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{e^t + e^{-t}}, \quad \text{og} \quad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = F(x) + C.$$

Vi nå bruker substitusjon for å finne $F(u)$ og

$$F(u) = \int_a^u f'(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(u)) - f(g(a)).$$

Vi prøver med

$$g(x) = e^x, \quad g'(x) = e^x, \quad f'(y) = \frac{1}{y^2+1}, \quad f(y) = \arctan(y)$$

$$F(u) = \int_a^u \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_a^u f'(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_a^u \frac{e^x\, dx}{(e^{2x}+1)} = \arctan(e^u) - \arctan(e^a),$$

og

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \arctan(e^x) + C$$

Oppgave 18 Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Løsning Dette betyr at vi skal finne den antideriverte av funksjonen og legge til en konstant. Ved hjelp av fundamentalteorem del 1 den antideriverte er

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{e^t + e^{-t}}, \quad \text{og} \quad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = F(x) + C.$$

Vi nå bruker substitusjon for å finne $F(u)$ og vi bruker som før

$$g(x) = e^x, \quad g'(x) = e^x, \quad f'(y) = \frac{1}{y^2 + 1}, \quad f(y) = \arctan(y)$$

og ved å definere $A = g(a) = e^a$ og $U = g(u) = e^u$ og så bruke

$$F(u) = \int_a^u \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_a^u \frac{e^x\,dx}{((e^x)^2 + 1)} = \int_a^u f'(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_A^U f'(y)\,dy = f(U) - f(A).$$

$$F(u) = \int_a^u \frac{1}{y^2 + 1}\,dy = \arctan(U) - \arctan(A) = \arctan(e^u) - \arctan(e^a),$$

og så

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \arctan(e^x) + C$$

Eksempel 2
Finn arealen av områden omringet av kurvene $y = x^2 - 2x$ og $y = 4 - x^2$.

Eksempel 3
Finn arealen av områden som ligger mellom kurven $y = \sin(x)$ og $y = \cos(x)$ fra $x = 0$ til $x = 2\pi$.

Eksempel 4
Finn arealen av område som ligger på høyre siden av parabelen $x = y^2 - 12$ og til venstre for linjen $y = x$

- Delvisintegrasjon
- Delbrøkoppspalting og integrasjon av rasjonale funksjoner
- Uegentlige integral

Regel for den deriverte av en produkt:

$$\frac{d}{dx}(U(x)V(x)) = U(x)\frac{dV}{dx} + V(x)\frac{dU}{dx}$$

vi integrere på begge sider

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(U(x)V(x))\,dx = \int_a^b U(x)\frac{dV}{dx}\,dx + \int_a^b V(x)\frac{dU}{dx}\,dx$$

og bruker fundamentalteoremet på venstre siden så

$$U(x)V(x)|_a^b = \int_a^b U(x)\frac{dV}{dx}\,dx + \int_a^b V(x)\frac{dU}{dx}\,dx$$

som kan også skrives som

$$\int_a^b U(x)\frac{dV}{dx}\,dx = U(x)V(x)|_a^b - \int_a^b V(x)\frac{dU}{dx}\,dx$$

Vi bruker

$$\int_a^b U(x)\frac{dV}{dx}\,dx = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)\frac{dU}{dx}\,dx.$$

Eksempel 5:

$$\int_1^e x^3(\ln x)^2\,dx$$

Oppgave 15:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin^{-1}(x)}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

vi skal se at det er lettere å integrere når $\mathrm{grad}(P(x)) < \mathrm{grad}(Q(x))$.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

vi skal se at det er lettere å integrere når
$\mathrm{grad}(P(x)) < \mathrm{grad}(Q(x))$.
Hvis dette ikke er tilfellet prøve vi å skrive $P(x)$ som

$$P(x) = Q(x)\tilde{Q}(x) + R(x)$$

med $\tilde{Q}(x)$ og $R(x)$ to polynomer av grad mindre enn $\mathrm{grad}(P(x))$.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

vi skal se at det er lettere å integrere når
$\mathrm{grad}(P(x)) < \mathrm{grad}(Q(x))$.
Hvis dette ikke er tilfellet prøve vi å skrive $P(x)$ som

$$P(x) = Q(x)\tilde{Q}(x) + R(x)$$

med $\tilde{Q}(x)$ og $R(x)$ to polynomer av grad mindre enn $\mathrm{grad}(P(x))$.
Så

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \tilde{Q}(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

her er $\tilde{Q}(x)$ et polynom (dvs lett å integrere) og vi kan håpe for at $\frac{R(x)}{Q(x)}$ er slik at $\mathrm{grad}(R(x)) < \mathrm{grad}(Q(x))$ og også lett å integrere (i motsatt fall må vi repeterer prosedyren for $\frac{R(x)}{Q(x)}$).

- lineær

$$\int \frac{c}{ax+b}\,dx = \frac{c}{a}\ln|ax+b| + C$$

- lineær

$$\int \frac{c}{ax+b}\,dx = \frac{c}{a}\ln|ax+b| + C$$

- kvadratisk

1.
$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$$

2.
$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

3.
$$\int \frac{x}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C$$

4.
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C$$

Delbøkoppspalting

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a_n)}$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Type 1: når $a = -\infty$ eller $b = \infty$ eller begge deler.

$$A = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

- Type 2: når $f(x)$ er ikke begrenset når $x \to a$ eller $x \to b$.

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Teorem 3 kap 6.5

- Trapesmetode
- Simpsons metode