TMA4100 Matematikk 1
Øving 4

Høsten 2014

1 **a)** Newtons metode for løsning av ikke-lineære ligninger av type $f(x) = 0$ er

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Skriv et Matlab- eller Python-program for å løse femtegradsligningen

$$x^5 + x + 1 = 0$$

ved bruk av Newtons metode. Bruk $x = 0$ som initialverdi og utfør fire iterasjoner. Legg ved en utskrift av programmet og svaret du får etter fire iterasjoner.

b) Modifiser programmet fra **a)** slik at det inkluderer et *stoppkriterium*. Med andre ord, iterasjonene bør fortsette til absoluttverdien av funksjonen evaluert i approksimasjonen du får er mindre enn toleransen, det vil si

$$|f(x_n)| < 10^{-8}.$$

c) På hjemmesiden er det lagt ut to filer, `euler.m` (Matlab) og `euler.py` (Python). Begge beregner en tilnærming til løsningen av en ordinær differensialligning av formen $dy/dt = f(t, y)$ med Eulers metode. Bruk rutinen for å finne en tilnærming til løsningen av

$$\frac{d}{dt}y(t) = 3\,t\,y(t) + 1, \quad y(0) = 0$$

for $0 \leq t \leq 1$. Bruk $h = 0.1$. Legg ved et plot av tilnærmingen du får som funksjon av t.

2 **a)** La f være tre ganger deriverbar på $[a, b]$. Vis at det finnes c slik at

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f'''(c).$$

b) Vis at

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + 2\tan^2 x}{e^x - 1 + x^3 - x} = 5.$$

3 La $a_1 = 1$ og $a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$ Vis at $\{a_n\}$ er voksende og begrenset ovenifra. (*Vink:* Vis at 3 er en øvre skranke). Vis deretter at følgen konvergerer og finn grenseverdien.

4 Finn summen til de gitte rekkene eller vis at de divergerer.

a) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+2}$

b) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n^n}}$