Følger og rekker

Department of Mathematical Sciences, NTNU, Norway

November 10, 2014

- Beskrivelse av følger eksempler og definisjon
- Egenskaper med følger
- Grenseverdi for følger (og teknikker for å vise at en følge konvergerer eller divergerer)
- Begrensede monotoner følger konvergerer
- Definisjon av rekker, konvergerende rekker
- Geometrisk rekke
- Teoremer om konvergens/divergens av rekker

Eksempel Newtonsmetode

Newtonsmetode for $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

generere en følge av approksimasjoner av løsningen til $f(x) = 0$.

Eksempel Newtonsmetode

Newtonsmetode for $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

generere en følge av approksimasjoner av løsningen til $f(x) = 0$.

Eksempel

Vi skal approksimere løsningen til $x^2 = 2$, da er $f(x) = x^2 - 2$ og $f'(x) = 2x$.

Eksempel Newtonsmetode

Newtonsmetode for $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

generere en følge av approksimasjoner av løsningen til $f(x) = 0$.

Eksempel

Vi skal approksimere løsningen til $x^2 = 2$, da er $f(x) = x^2 - 2$ og $f'(x) = 2x$.Vi tar $x_0 = 0.5$,

Newtonsmetode for $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

generere en følge av approksimasjoner av løsningen til $f(x) = 0$.

Eksempel

Vi skal approksimere løsningen til $x^2 = 2$, da er $f(x) = x^2 - 2$ og $f'(x) = 2x$.Vi tar $x_0 = 0.5$,vi får

$x_0 = 0.5$	$y_0 = f(x_0) = x_0^2 - 2 = -1.75$

Newtonsmetode for $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

generere en følge av approksimasjoner av løsningen til $f(x) = 0$.

Eksempel

Vi skal approksimere løsningen til $x^2 = 2$, da er $f(x) = x^2 - 2$ og $f'(x) = 2x$.Vi tar $x_0 = 0.5$,vi får

$x_0 = 0.5$	$y_0 = f(x_0) = x_0^2 - 2 = -1.75$
$x_1 = 0.5 - \frac{0.5^2-2}{2 \cdot 0.5} = 2.25$	$y_1 = f(x_1) = x_1^2 - 2 = 3.0625$

Newtonsmetode for $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

generere en følge av approksimasjoner av løsningen til $f(x) = 0$.

Eksempel

Vi skal approksimere løsningen til $x^2 = 2$, da er $f(x) = x^2 - 2$ og $f'(x) = 2x$.Vi tar $x_0 = 0.5$,vi får

$$x_0 = 0.5 \qquad y_0 = f(x_0) = x_0^2 - 2 = -1.75$$

$$x_1 = 0.5 - \tfrac{0.5^2-2}{2\cdot 0.5} = 2.25 \qquad y_1 = f(x_1) = x_1^2 - 2 = 3.0625$$

$$x_2 = x_1 - \tfrac{x_1^2-2}{2\cdot x_1} = 1.5694 \qquad y_2 = f(x_2) = x_2^2 - 2 = 0.46315$$

Newtonsmetode for $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

generere en følge av approksimasjoner av løsningen til $f(x) = 0$.

Eksempel

Vi skal approksimere løsningen til $x^2 = 2$, da er $f(x) = x^2 - 2$ og $f'(x) = 2x$.Vi tar $x_0 = 0.5$,vi får

$x_0 = 0.5$	$y_0 = f(x_0) = x_0^2 - 2 = -1.75$
$x_1 = 0.5 - \frac{0.5^2-2}{2 \cdot 0.5} = 2.25$	$y_1 = f(x_1) = x_1^2 - 2 = 3.0625$
$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2-2}{2 \cdot x_1} = 1.5694$	$y_2 = f(x_2) = x_2^2 - 2 = 0.46315$
$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2-2}{2 \cdot x_2} = 1.42189$	$y_3 = f(x_3) = x_3^2 - 2 = 0.0217$

Newtonsmetode for $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

generere en følge av approksimasjoner av løsningen til $f(x) = 0$.

Eksempel

Vi skal approksimere løsningen til $x^2 = 2$, da er $f(x) = x^2 - 2$ og $f'(x) = 2x$.Vi tar $x_0 = 0.5$,vi får

$$\begin{array}{l|l}
x_0 = 0.5 & y_0 = f(x_0) = x_0^2 - 2 = -1.75 \\
x_1 = 0.5 - \frac{0.5^2-2}{2 \cdot 0.5} = 2.25 & y_1 = f(x_1) = x_1^2 - 2 = 3.0625 \\
x_2 = x_1 - \frac{x_1^2-2}{2 \cdot x_1} = 1.5694 & y_2 = f(x_2) = x_2^2 - 2 = 0.46315 \\
x_3 = x_2 - \frac{x_2^2-2}{2 \cdot x_2} = 1.42189 & y_3 = f(x_3) = x_3^2 - 2 = 0.0217 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Newtonsmetode for $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

generere en følge av approksimasjoner av løsningen til $f(x) = 0$.

Eksempel

Vi skal approksimere løsningen til $x^2 = 2$, da er $f(x) = x^2 - 2$ og $f'(x) = 2x$.Vi tar $x_0 = 0.5$,vi får

$x_0 = 0.5$	$y_0 = f(x_0) = x_0^2 - 2 = -1.75$
$x_1 = 0.5 - \frac{0.5^2-2}{2\cdot 0.5} = 2.25$	$y_1 = f(x_1) = x_1^2 - 2 = 3.0625$
$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2-2}{2\cdot x_1} = 1.5694$	$y_2 = f(x_2) = x_2^2 - 2 = 0.46315$
$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2-2}{2\cdot x_2} = 1.42189$	$y_3 = f(x_3) = x_3^2 - 2 = 0.0217$
$\vdots$	$\vdots$
$\{x_n\}$	$\{y_n\}$

Newtonsmetode for $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

generere en følge av approksimasjoner av løsningen til $f(x) = 0$.

Eksempel

Vi skal approksimere løsningen til $x^2 = 2$, da er $f(x) = x^2 - 2$ og $f'(x) = 2x$.Vi tar $x_0 = 0.5$,vi får

$x_0 = 0.5$	$y_0 = f(x_0) = x_0^2 - 2 = -1.75$
$x_1 = 0.5 - \frac{0.5^2-2}{2 \cdot 0.5} = 2.25$	$y_1 = f(x_1) = x_1^2 - 2 = 3.0625$
$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2-2}{2 \cdot x_1} = 1.5694$	$y_2 = f(x_2) = x_2^2 - 2 = 0.46315$
$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2-2}{2 \cdot x_2} = 1.42189$	$y_3 = f(x_3) = x_3^2 - 2 = 0.0217$
$\vdots$	$\vdots$
$\{x_n\}$	$\{y_n\}$
går mot $\sqrt{2}$	går mot 0

Måter å generere og beskrive følger på

- rekursiv (iterativ) definisjon, som for Newtonsmetode

- rekursiv (iterativ) definisjon, som for Newtonsmetode
- beskrivelse ved å liste elementene i følgen: $\{1, 2, 3, \dots\}$

- rekursiv (iterativ) definisjon, som for Newtonsmetode
- beskrivelse ved å liste elementene i følgen: $\{1, 2, 3, \ldots\}$
- definer den generelle ledd a_n ved en formel: $a_n := \frac{\cos(n)}{n}$

- rekursiv (iterativ) definisjon, som for Newtonsmetode
- beskrivelse ved å liste elementene i følgen: $\{1, 2, 3, \dots\}$
- definer den generelle ledd a_n ved en formel: $a_n := \frac{\cos(n)}{n}$

DEF En følge er en funksjon mellom $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, så

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3\ \dots$$

En følge er

1. **begrenset nedenifra** fra L hvis $a_n \geq L$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$
   (L heter **nedreskranke**)
2. **begrenset ovenifra** fra L hvis $a_n \leq L$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$
   (L heter **ovreskranke**)
3. **positiv** hvis $a_n \geq 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots,$
4. **negativ** hvis $a_n \leq 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$
5. **voksende** hvis $a_n \leq a_{n+1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots;$
6. **avtagende** hvis $a_n \geq a_{n+1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$
7. **alternerende** hvis $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$

En følge er

1. **begrenset nedenifra** fra L hvis $a_n \geq L$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$
   (L heter **nedreskranke**)
2. **begrenset ovenifra** fra L hvis $a_n \leq L$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$
   (L heter **ovreskranke**)
3. **positiv** hvis $a_n \geq 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots,$
4. **negativ** hvis $a_n \leq 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$
5. **voksende** hvis $a_n \leq a_{n+1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots;$
6. **avtagende** hvis $a_n \geq a_{n+1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$
7. **alternerende** hvis $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$

Eksempler:

- $\{n\}$ er voksende, positiv, begrenset nedeinfra
- $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$ er positiv, voksende, med ovreskranke lik 1 og nedreskranke 0
- $(-1)^n$ er alternerende

DEF En følge konvergerer mot en grenseverdi L hvis for alle $\epsilon > 0$ (*så lite som vi vil*) det finnes en indeks N (*stor nok*) slik at

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

DEF En følge konvergerer mot en grenseverdi L hvis for alle $\epsilon > 0$ (*så lite som vi vil*) det finnes en indeks N (*stor nok*) slik at

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

Teorem
Hvis $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ og $a_n := f(n)$ da $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Basert på resultatene om grenseverdier for funksjoner har vi at

Basert på resultatene om grenseverdier for funksjoner har vi at

- $$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

Basert på resultatene om grenseverdier for funksjoner har vi at

- $$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

- $$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

Basert på resultatene om grenseverdier for funksjoner har vi at

- $$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$
- $$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$
- $$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

Basert på resultatene om grenseverdier for funksjoner har vi at

- $$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$
- $$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$
- $$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$
- $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

  gitt at $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Basert på resultatene om grenseverdier for funksjoner har vi at

- hvis $a_n \leq b_n$ for $n \geq N$ da

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

Basert på resultatene om grenseverdier for funksjoner har vi at

- hvis $a_n \leq b_n$ for $n \geq N$ da

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

- hvis $a_n \leq c_n \leq b_n$ for $n \geq N$ og $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$ da

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

Teorem 1 Kap 9.1

Hvis $\{a_n\}$ konvergerer da er $\{a_n\}$ begrenset.

Teorem 1 Kap 9.1
Hvis $\{a_n\}$ konvergerer da er $\{a_n\}$ begrenset.

Teorem (Uten bevis) *Begrensede monotone følger konvergerer*

Eks 8 kap 9.1 Vis at følgen$\{a_n\}$ gitt av $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ konvergerer.

En rekke er en uendelig sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

En rekke er en uendelig sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Eksempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

(harmonisk rekke)

En rekke er en uendelig sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Eksempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

(harmonisk rekke)

Når vi skriver $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mener vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \left(\left(\left(a_1 + a_2\right) + a_3\right) + a_4\right) + \ldots$$

En rekke er en uendelig sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Eksempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

(harmonisk rekke)

Når vi skriver $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mener vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = (((a_1 + a_2) + a_3) + a_4) + \ldots$$

delsummer av rekka

$$\begin{aligned} s_1 &:= a_1 \\ s_2 &:= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &:= a_1 + \ldots a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \end{aligned}$$

Vi sier at rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer til summen s, og skriver

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s,$$

hvis og bare hvis

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

eksisterer og er endelig.

Ellers sier vi at rekka divergerer.

Geometrisk rekke er en rekke av formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

der a og r er reelle tall.

Geometrisk rekke er en rekke av formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

der a og r er reelle tall.
Delsummer

$$s_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

Geometrisk rekke er en rekke av formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

der a og r er reelle tall.
Delsummer

$$s_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

og

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \begin{cases} 0 \text{ hvis } a = 0 \\ \frac{a}{1-r} \text{ hvis } |r| < 1 \\ \text{divergerer hvis } |r| \geq 1 \end{cases}$$

Geometrisk rekke er en rekke av formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

der a og r er reelle tall.
Delsummer

$$s_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

og

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \begin{cases} 0 \text{ hvis } a = 0 \\ \frac{a}{1-r} \text{ hvis } |r| < 1 \\ \text{divergerer hvis } |r| \geq 1 \end{cases}$$

Eksempel av en teleskoperende rekke:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Teorem 4

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer da er $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teorem 4

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer da er $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. **DET MOTSATTE IMPLIKASJONEN GJELDER IKKE!!!!**

Teorem 4
Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer da er $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. **DET MOTSATTE IMPLIKASJONEN GJELDER IKKE!!!!**

Teorem 5 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer hvis og bare hvis $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergerer

Teorem 6 Hvis $\{a_n\}$ er positiv for $n \geq N$ da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ enten konvergerer eller divergerer mot ∞.

Teorem 4
Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer da er $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. **DET MOTSATTE IMPLIKASJONEN GJELDER IKKE!!!!**

Teorem 5 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer hvis og bare hvis $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergerer

Teorem 6 Hvis $\{a_n\}$ er positiv for $n \geq N$ da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ enten konvergerer eller divergerer mot ∞.

Teorem 7 Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer med sum A og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer med sum B da

- $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n = A \pm B$
- Hvis $a_n \leq b_n$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$ da $A \leq B$

- Integral test
- Sammenligningstest (Teorem 9 og 10)
- Quotienttest (Teorem 11)
- Roottest (Teorem 12)

La $a_n := f(n)$ og f positiv, kontinuerlig ikke voksende funksjon på $[N, \infty)$ for $N > 0$ da

$$\sum_{n=1}^{n} a_n, \quad \text{og} \quad \int_N^\infty f(t)dt$$

enten begge konvergerer eller begge divergerer.

Gitt $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ slik at det finnes en konstant K slik at $0 \leq a_n \leq Kb_n$

a) hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

b) hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer

La $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ være positive følger og $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ der $L \geq 0$ eller $+\infty$ da

a) hvis $L < \infty$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

b) hvis $L > 0$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerer da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer

La $a_n > 0$ for $n \geq N$ og $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ der $\rho \in \mathbb{R}$ eller $\rho = +\infty$ da

a) hvis $0 \leq \rho < 1$ da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

b) hvis $1 < \rho \leq \infty$ da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer

c) hvis $\rho = 1$ kan vi ikke konkludere om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer eller divergerer.

La $a_n > 0$ (for $n > N$) og $\sigma = \lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ eller $\sigma = +\infty$ da

a) hvis $0 \leq \sigma < 1$ da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

b) hvis $1 < \sigma \leq \infty$ da $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer

c) hvis $\sigma = 1$ kan vi ikke konkludere om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer eller divergerer.

- Absolutt konvergens
- Alternerende rekker
- Potensrekker
- Operasjoner på rekker (algebraiske og leddvis)

DEF
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absoluttkonvergent hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer
Eksempel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

er absoluttkonvergent
Teorem Hvis en rekke er absoluttkonvergent da er rekka konvergent.

DEF En rekke som er er konvergent men ikke absoluttkonvergent kalles for **betingetkonvergent**

Eksempel

Den alternerende harmoniske rekke er betingetkonvergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Eksempel Den alternerende harmoniske rekke er alternerende

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Teorem 14

La $\{a_n\}$ være slik at det finnes N slik at

(i) $a_n a_{n+1} < 0$ for $n \geq N$

(ii) $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ for $n \geq N$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

da konvergerer rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Feilestimat for alternerende rekker:

$$|s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}|$$

der $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

DEF Rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

kalles potensrekke i potenser av $(x-c)$ (eller potensrekka om c).
$a_0, a_1, \dots$ kalles koeffisenter av rekka.
En potensrekke konvergerer avhengig av hvordan vi velger x:
Eksempel

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1$$

funksjonen $\frac{1}{1-x}$ kan representeres av en rekke i intervallet $(-1, 1)$.
Konvergenssentre c er konvergenssentre av potensrekka: for $x = c$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(c-c)^n = a_0$ rekka konvergerer.

Teorem 17

En potensrekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ tilfredstiller en av følgende

(i) konvergerer absolutt bare for $x = c$

(ii) konvergerer absolutt for alle $x \in \mathbb{R}$

(iii) det finnes $R \in \mathbb{R}$ og $R > 0$ slik at

- rekka konvergerer absolutt for alle x slik at $|x-c| < R$
- rekka divergerer for alle x slik at $|x-c| > R$
- for x slik at $|x-c| = R$ kan rekka konvergere eller divergere

Konvergensradie R kalles konvergensradie

Man kan bruke kvotienttest for å finne konvergensradie til en potensrekke.

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ være konvergerende potensrekker med konvergensradii R_a og R_b, la c være en konstant da

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer med konvergensradie R_a

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ være konvergerende potensrekker med konvergensradii R_a og R_b, la c være en konstant da

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n)x^n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer med konvergensradie R_a

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

konvergerer med konvergensradie $R = \min\{R_a, R_b\}$

(iii)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

konvergerer med konvergensradie $R = \min\{R_a, R_b\}$ og

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n$$

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ være konvergerende potensrekker med konvergensradii R_a og R_b, la c være en konstant da

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n)x^n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer med konvergensradie R_a

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

konvergerer med konvergensradie $R = \min\{R_a, R_b\}$

(iii)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

konvergerer med konvergensradie $R = \min\{R_a, R_b\}$ og

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n$$

Potensrekker som konvergerer kan også integreres og deriveres ledd for ledd og de beskriver kontinuerlige funksjoner der de konvergerer.

Forelesning 12.11.2014, Kap 9.6 og 9.7

- Taylor- og Maclaurinrekker
- Taylors teorem