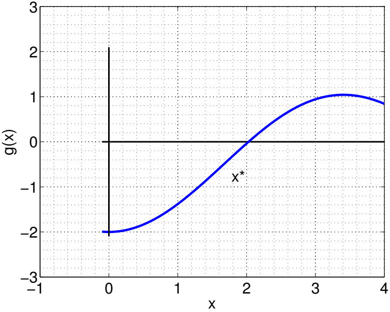
# *Flere anvendelser av derivasjon*

Department of Mathematical Sciences, NTNU, Norway

September 29, 2014

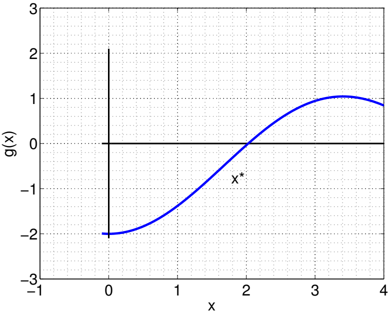
- Fikspunkt-iterasjon
- Newtons metode

Hvis funksjonen skifter fortegn da finnes det et nullpunkt.



# *Metoder for å finne nullpunkter av funksjoner:* $g(x^*) = 0$

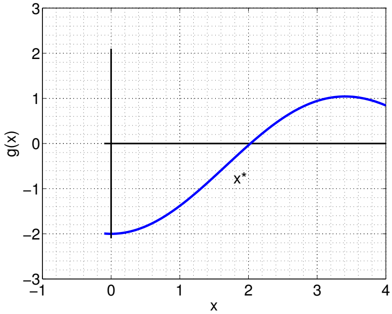
Hvis funksjonen skifter fortegn da finnes det et nullpunkt.




Fikspunktiterasjon er en prosedyre $\Phi$ for å forbedre tilnærmelse av $x^*$ gitt en $x_n \approx x^*$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Hvis funksjonen skifter fortegn da finnes det et nullpunkt.




Fikspunktiterasjon er en prosedyre $\Phi$ for å forbedre tilnærmelse av $x^*$ gitt en $x_n \approx x^*$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Et mulig valg av $\phi$ er gitt av Newton metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

For kontinuerlige funksjoner på lukkede intervaller eller endelige unioner av lukkede intervaller:

- eksistens av absolutte maksima og minima (Teroem 5)
- hvor skal vi lete etter lokale maksima og minima (Teroem 6)
- hvordan skal vi avgjøre at et punkt er en lokal maksimum eller en lokalminimum ved å se på den første deriverte av $f$ nær punktet (Teorem 7)

For kontinuerlige funksjoner på lukkede intervaller eller endelige unioner av lukkede intervaller:

- eksistens av absolutte maksima og minima (Teroem 5)
- hvor skal vi lete etter lokale maksima og minima (Teroem 6)
- hvordan skal vi avgjøre at et punkt er en lokal maksimum eller en lokalminimum ved å se på den første deriverte av $f$ nær punktet (Teorem 7)

For kontinuerlige funksjoner på åpne intervaller

- Hvordan kan vi bruke grenseverdiene i endepunktene for å avgjøre om det finnes et absolutt maksimum eller absolutt minimum i intervallet (Teorem 8)

For kontinuerlige funksjoner på lukkede intervaller eller endelige unioner av lukkede intervaller:

- eksistens av absolutte maksima og minima (Teroem 5)
- hvor skal vi lete etter lokale maksima og minima (Teroem 6)
- hvordan skal vi avgjøre at et punkt er en lokal maksimum eller en lokalminimum ved å se på den første deriverte av $f$ nær punktet (Teorem 7)

For kontinuerlige funksjoner på åpne intervaller

- Hvordan kan vi bruke grenseverdiene i endepunktene for å avgjøre om det finnes et absolutt maksimum eller absolutt minimum i intervallet (Teorem 8)

- Kap 4.8 løsning av en ekstremalverdiprobelm

**Definisjon av absolutt maximum**: $f$ har et absolutt maximum i $x_0$ hvis for alle $x \in \mathcal{D}(f)$ vi har

$$f(x) \leq f(x_0)$$

**Definisjon av absolutt maximum**: $f$ har et absolutt maximum i $x_0$ hvis for alle $x \in \mathcal{D}(f)$ vi har

$$f(x) \leq f(x_0)$$

**Definisjon av absolutt mimimum**: $f$ har et absolutt minimum i $x_0$ hvis for alle $x \in \mathcal{D}(f)$ vi har

$$f(x) \geq f(x_0)$$

## **Husk**: *Teorem 8, kap 1.4: ekstremalverdisetning (Min-max)*

Hvis $f$ er kontinuerlig på $[a, b]$ finnes det tall $p$ og $q$ slik at for alle $x \in [a, b]$

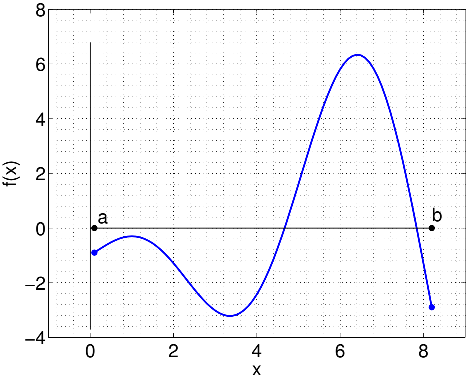
$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(p) = M.$$

Hvis $f$ er kontinuerlig på $[a,b]$ finnes det tall $p$ og $q$ slik at for alle $x \in [a,b]$

$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(p) = M.$$

$m$ minimumverdi

$M$ maximumverdi

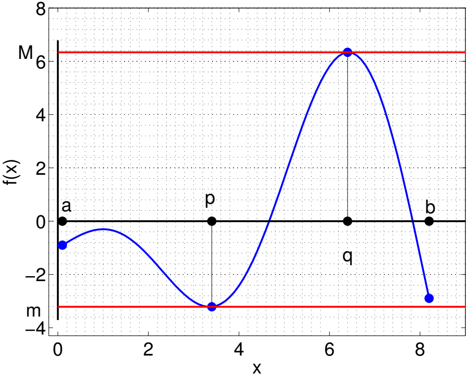


Hvis $f$ er kontinuerlig på $[a, b]$ finnes det tall $p$ og $q$ slik at for alle $x \in [a, b]$

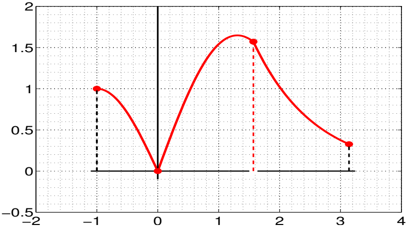
$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(p) = M.$$

$m$ minimumverdi

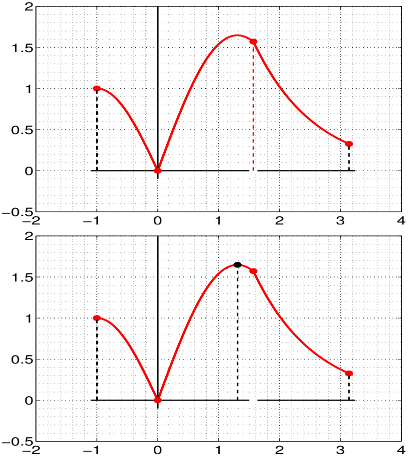
$M$ maximumverdi



**Teorem 5 kap 4.4** Hvis $f$ er slik at $\mathcal{D}(f)$ er enten et lukket intervall eller en endelig union av lukkede intervaller, og $f$ er kontinuerlig, da eksisterer et absolutt maximum og et absolutt minimum for $f$.



**Teorem 5 kap 4.4** Hvis $f$ er slik at $\mathcal{D}(f)$ er enten et lukket intervall eller en endelig union av lukkede intervaller, og $f$ er kontinuerlig, da eksisterer et absolutt maximum og et absolutt minimum for $f$.



**Definisjon av lokalt maximum**: $f$ har et lokalt maximum i $x_0$ i $\mathcal{D}(f)$ hvis det finnes $h > 0$ slik at

$$f(x) \leq f(x_0)$$

for $x \in \mathcal{D}(f)$ og

$$|x - x_0| < h.$$

(I næarheten av $x_0$ oppnår $f$ verdier som er mindre eller lik $f(x_0)$.)

**Definisjon av lokalt maximum**: $f$ har et lokalt maximum i $x_0$ i $\mathcal{D}(f)$ hvis det finnes $h > 0$ slik at

$$f(x) \leq f(x_0)$$

for $x \in \mathcal{D}(f)$ og

$$|x - x_0| < h.$$

(I næarheten av $x_0$ oppnår $f$ verdier som er mindre eller lik $f(x_0)$.)

**Definisjon av lokalt minimum**: $f$ har et lokalt minimum i $x_0$ i $\mathcal{D}(f)$ hvis det finnes $h > 0$ slik at

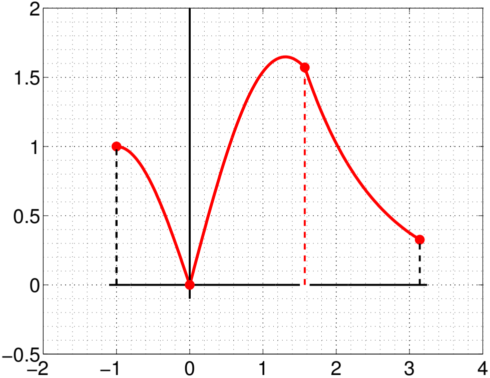
$$f(x) \geq f(x_0)$$

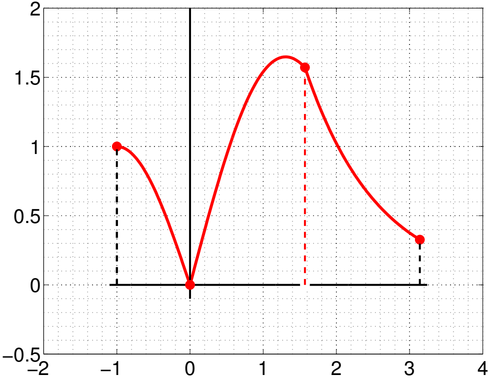
for $x \in \mathcal{D}(f)$ og

$$|x - x_0| < h.$$

(I næarheten av $x_0$ oppnår $f$ verdier som er større eller lik $f(x_0)$.)

# *Å finne maxima og minima*






**Teorem 6**: Hvis $f$ er definert på et intervall $I$ og $f$ har et lokalt maksimum (eller et lokalt minimum) i et punkt $x_0 \in I$ da må $x_0$ være enten

1. et punkt der $f'(x) = 0$ (kritiskpunkt);
2. eller et punkt der $f'$ er ikke definert (singularpunkt);
3. eller et endepunkt.

## *Eksempel 1*

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \qquad x \in [-2, 2].$$

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \qquad x \in [-2, 2].$$

**Løsning**: se på

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \qquad x \in [-2, 2],$$

den er definert over alt på $[-2, 2]$ da finnes ikke noe singulære punkter (tilfellet 2 teroem 6 er utelukket her). Vi fokuserer på kritiskepunkter og endepunktene.

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

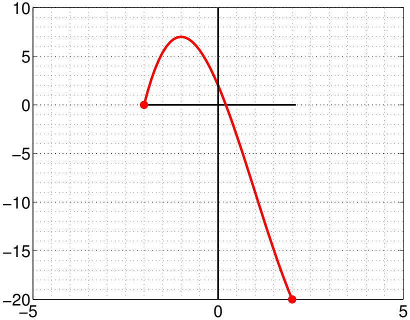
vi løser den adregradsligningen og finner at $x = -1$ og $x = 3$ er kritiskepunkter. Men $x = 3$ er utenfør domenet til fiunksjonen, derfor kan vi droppe $x = 3$. Vi ser på $x = -1$, $g(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$. Til slutt ser vi på endepunktene (tilfellet 3 i teorem 6):

$$\begin{aligned} g(-2) &= -8 - 12 + 18 + 2 = 0 \\ g(2) &= 8 - 12 - 18 + 2 = -20 \end{aligned}$$

Da har vi et absolutt maksimum i $x = -1$, $g(-1) = 7$ og et absolutt minimum i $x = 2$ $g(-2) = 20$.

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \qquad x \in [-2, 2].$$




Ved en grafisk kalkulator er dette mye enklere (men grafiske kalkulatorer er ikke alltid tilgjengelig).

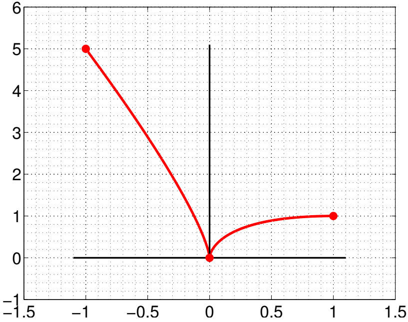
# *Eksempel 2*

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = 3x^{2/3} - 2x, \qquad x \in [-1, 1].$$

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = 3x^{2/3} - 2x, \qquad x \in [-1, 1].$$



**Teorem 7, del 1**
Vi ser der $f'(x) = 0$ og der $f'$ er ikke definert. Anta $f$ er kontinuerlig og $x_0$ er ikke et endepunkt.

- Hvis det finnes $(a, b)$ (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) > 0$ til venstre for $x_0$ og $f'(x) < 0$ til høyre for $x_0$ i $(a, b)$ da er $x_0$ et lokalt maximum.

**Teorem 7, del 1**

Vi ser der $f'(x) = 0$ og der $f'$ er ikke definert. Anta $f$ er kontinuerlig og $x_0$ er ikke et endepunkt.

- Hvis det finnes $(a, b)$ (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) > 0$ til venstre for $x_0$ og $f'(x) < 0$ til høyre for $x_0$ i $(a, b)$ da er $x_0$ et lokalt maximum. ($f$ avtar før $x_0$ og vokser etter $x_0$)
- Hvis det finnes $(a, b)$ (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) < 0$ til venstre for $x_0$ og $f'(x) > 0$ til høyre for $x_0$ i $(a, b)$ da er $x_0$ et lokalt minimum.

**Teorem 7, del 1**

Vi ser der $f'(x) = 0$ og der $f'$ er ikke definert. Anta $f$ er kontinuerlig og $x_0$ er ikke et endepunkt.

- Hvis det finnes $(a, b)$ (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) > 0$ til venstre for $x_0$ og $f'(x) < 0$ til høyre for $x_0$ i $(a, b)$ da er $x_0$ et lokalt maximum. ($f$ avtar før $x_0$ og vokser etter $x_0$)
- Hvis det finnes $(a, b)$ (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) < 0$ til venstre for $x_0$ og $f'(x) > 0$ til høyre for $x_0$ i $(a, b)$ da er $x_0$ et lokalt minimum. ($f$ avtar før $x_0$ og vokser etter $x_0$)

**Teorem 7, del 2**

Anta $a$ er venstre endepunkt av domenet og $f$ er høyrekontinuerlig i $a$.

- Hvis $f'(x) > 0$ på et intervall $(a, b)$, da har $f$ et lokalt minimum i $a$.
- Hvis $f'(x) < 0$ på et intervall $(a, b)$, da har $f$ et lokalt maximum i $a$.

Anta $b$ er høyre endepunkt av domenet og $f$ er venstrekontinuerlig i $b$.

- Hvis $f'(x) > 0$ på et intervall $(a, b)$, da har $f$ et lokalt maximum i $a$.
- Hvis $f'(x) < 0$ på et intervall $(a, b)$, da har $f$ et lokalt minimum i $a$.

Finn de lokale og absolutte minima og maksima av
$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

Finn de lokale og absolutte minima og maksima av $f(x) = x - x^{2/3}$

**Merknad** Det er ikke tilstrekkelig at $f'(x_0) = 0$ for at $f$ har en ekstremalverdi i $x_0$.

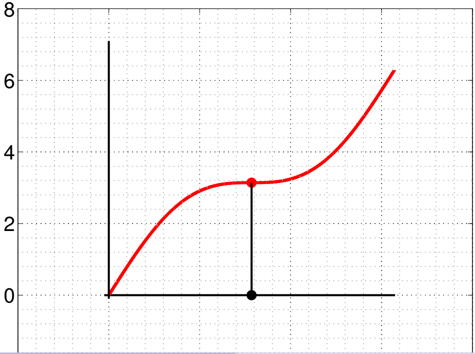
*Example*

Betrakt $f(x) = sin(x) + x$ som har deriverte $f'(x) = \cos(x) + 1$.

**Merknad** Det er ikke tilstrekkelig at $f'(x_0) = 0$ for at $f$ har en ekstremalverdi i $x_0$.

*Example*

Betrakt $f(x) = sin(x) + x$ som har deriverte $f'(x) = \cos(x) + 1$. $f'$ er null i $\pi$ men $f$ har verken et maximum eller et mimimum i $x = \pi$ (men et infleksjonspunkt).



La $f$ være kontinuerlig i $(a, b)$ åpen intervall og

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L, \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = M$$

da

- hvis $f(u) > L$ og $f(u) > M$ for noen $u \in (a, b)$ da $f$ har et absolutt maximum i $(a, b)$
- hvis $f(v) < L$ og $f(v) < M$ for noen $v \in (a, b)$ da $f$ har et absolutt minimum i $(a, b)$

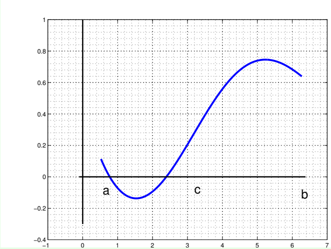
$a$ kan her erstattes med $-\infty$ og $b$ kan erstattes med $+\infty$ og i tillegg kan $L$ og $M$ erstattes med både $+\infty$ og $-\infty$.

*Example*

Vis at $f(x) = x + (4/x)$ har et absolutt minimum på intervallet $(0, \infty)$, finn minimumsverdien.

**Eksempel 5** En person kan løpe to ganger furtere enn hun kan svømme. Hun står i et punkt $A$ ved siden av en sirkelformet svømmebaseng (med diameter av 40 meter). Hun vil komme så fort som mulig til punkt $B$ som er diametralt motsatt i forhold til $A$. Planen er å løpe først rundt perimeteren av basenget til punkt $C$ og så legge på svøm langs en rettlinje til $B$. Hvor skal $C$ ligge for at den totale tiden fra $A$ til $B$ minimeres?

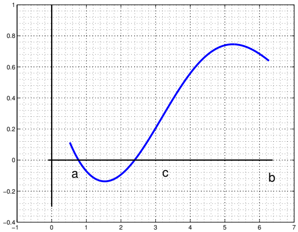
- Bøyning av funksjonen på et åpen intervall: konkavitet.
- Infleksjonspunkter (vendepunkter)
- Grafer av funksjoner
- L'Hopitals regel
- En ny oppgave i kap 4.8




- i intervallet $[a, c)$ er $f$ bøyd oppover (konkav opp)
- i intervallet $(c, b]$ er $f$ bøyd nedover (konkav ned)

Kan vi beskrive "bøyd oppover", "bøyd nedover" matematisk?

Vi ser på $f'$ som stigningstallet til tangenten i hver punkt til $f$:




- $f'$ vokser i intervallet $[a, c)$ (dvs $f''(x) > 0$)
- $f'$ avtar i intervallet $(c, b]$ (dvs $f''(x) < 0$)
- i punktet $c$ slutter $f'$ å vokse og beginner å avta (dvs $f''$ går fra å være positiv til å være negativ, $f''(c) = 0$)

**Definisjon av konkav opp funksjon**: $f$ er **konkav opp** i det åpne intervallet $(a, c)$ hvis $f'$ vokser i $(a, c)$ (det vil si hvis $f''$ er positiv i $(a, c)$)

**Definisjon av konkav opp funksjon**: $f$ er **konkav opp** i det åpne intervallet $(a, c)$ hvis $f'$ vokser i $(a, c)$ (det vil si hvis $f''$ er positiv i $(a, c)$)

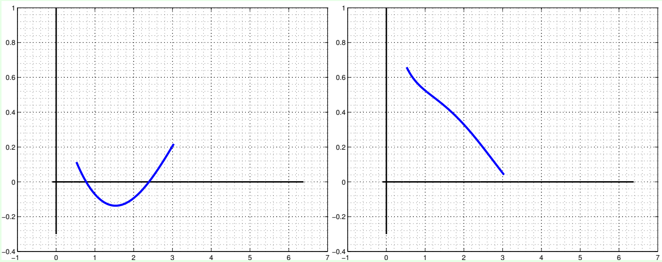


*Figure :* $f$ venstre, $f''$ høyre

**Definisjon av konkav ned funksjon**: $f$ er **konkav ned** i det åpne intervallet $(c, b)$ hvis $f'$ avtar i $(c, b)$ (det vil si hvis $f''$ er negativ i $(c, b)$)

**Definisjon av konkav ned funksjon**: $f$ er **konkav ned** i det åpne intervallet $(c, b)$ hvis $f'$ avtar i $(c, b)$ (det vil si hvis $f''$ er negativ i $(c, b)$)

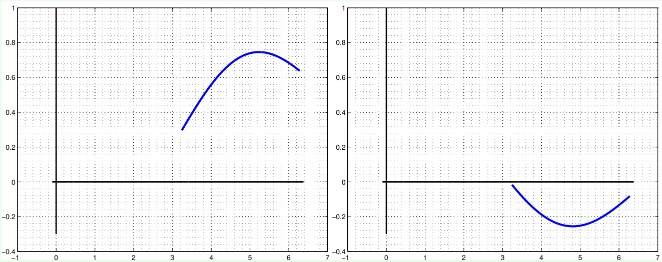



*Figure :* $f$ venstre, $f''$ høyre

**Definisjon**: et punkt $(c, f(c))$ er et **infleksjonspunkt** for $f$ hvis

- $f'$ er definert $c$ eller grafen til $f$ har en vertikal tangent i $c$
- og $f$ skifter fra å være konkav opp til å være konkav ned (eller omvendt) i punktet $c$

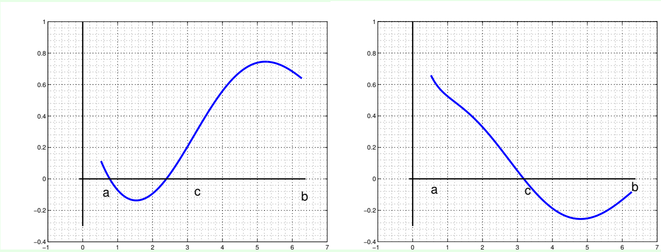



*Figure :* $f$ venstre, $f''$ høyre

Gitt

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$$

finn lokale ekstremaleverdier, konkavitet av $f$, så tegn grafen til $f$.

**Teorem 10** La $f$ være kontinuerlig og deriverbar to ganger

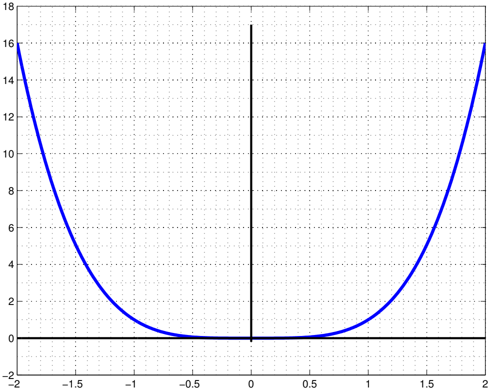
- Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) < 0$ da har $f$ et lokalt maksimum i $x_0$.
- Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) > 0$ da har $f$ et lokalt mimimum i $x_0$.
- Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) = 0$ da kan man ikke konkludere. $f$ kan ha enten et lokalt maksimum eller et lokalt minimum eller et infleksjonspunkt i $x_0$.

# Eksempel

$$f(x) = x^4$$

# Eksempel

$$f(x) = x^4$$



Det er tre typer asymptoter

- vertikale asymptoter i $x = a$ hvis:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{eller begge}$$

- horizontale asymptoter i $y = L$ hvis

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = L \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L \qquad \text{eller begge}$$

- skrå asymptoter: en linje $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ er en asymptot for $f$ hvis

$$\lim_{x\to -\infty} (f(x)-(ax+b)) = 0 \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x\to \infty} (f(x)-(ax+b)) = 0 \quad \text{eller begge}$$

Man bruker all informasjon man kan finne om $f$, $f'$ og $f''$ (hvis $f$ lar seg derivere).

- finn nullpunkter til $f$ og der $f$ er positiv og nevativt (om mulig)
- finn der funksjonen vokser og avtar
- finn maksima og minima
- finn infleksjonspunkter
- finn der hvor $f$ er konkav og der den er konveks
- finn asymptotene til $f$

En mer fullstendig checkliste finnes i kap 4.6 side 249.

| Type | Eksempel |
|---|---|
| $[0/0]$ | $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ |
| $[\infty/\infty]$ | $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{1}{x^2})}{\cot(x^2)}$ |
| $[0\cdot\infty]$ | $\lim_{x\to 0^+} x\ln(\frac{1}{x})$ |
| $[\infty-\infty]$ | $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\pi-2x}\right)$ |
| $[0^0]$ | $\lim_{x\to 0^+} x^x$ |
| $[\infty^0]$ | $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$ |
| $[1^\infty]$ | $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ |

For ubestemteformer av type $[0/0]$ og $[\infty/\infty]$ man kan bevise
**Teorem 3** Kap 4.3
La $f$ og $g$ være deriverbare på intervallet $(a, b)$ og $g'(x) \neq 0$ på $(a, b)$. Anta

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ og
- $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (med $L$ et reell tall eller $\pm\infty$)

da

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

For ubestemteformer av type $[0/0]$ og $[\infty/\infty]$ man kan bevise
**Teorem 3** Kap 4.3
La $f$ og $g$ være deriverbare på intervallet $(a, b)$ og $g'(x) \neq 0$ på $(a, b)$. Anta

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ og
- $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (med $L$ et reell tall eller $\pm\infty$)

da

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

I beviset bruker man den **generaliserte middelverdisetning** kap 2.8 Teor 16:

For ubestemteformer av type $[0/0]$ og $[\infty/\infty]$ man kan bevise
**Teorem 3** Kap 4.3
La $f$ og $g$ være deriverbare på intervallet $(a,b)$ og $g'(x) \neq 0$ på $(a,b)$. Anta

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ og
- $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (med $L$ et reell tall eller $\pm\infty$)

da

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

I beviset bruker man den **generaliserte middelverdisetning** kap 2.8 Teor 16:

**Teorem generaliserte middelverdisetning**
$F$ og $G$ kontinuerlige på $[a,b]$ og deriverbar på $(a,b)$ med $G'(x) \neq 0$ i $(a,b)$ da finnes det $c \in (a,b)$ slik at

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}$$

En boks lages ut av en rektangel av papp med dimensjoner 70 ganger 150 cm, ved å skjære 4 like firkanter fra gjørnene og ved å brette opp de 4 sidene for å forme boksen (boksen har ingen top). Hva er den største mulige volumen for boksen?

En boks lages ut av en rektangel av papp med dimensjoner 70 ganger 150 cm, ved å skjære 4 like firkanter fra gjørnene og ved å brette opp de 4 sidene for å forme boksen (boksen har ingen top). Hva er den største mulige volumen for boksen?

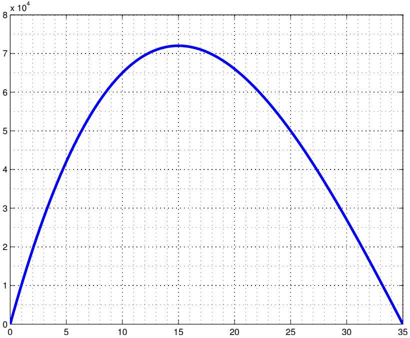



*Figure :* Volumen av boksen som funksjon av kanten til firkantene som skjæres av.

- Lineære approksimasjoner
- Taylor polynomer

Anta at vi vil tilnærme en funksjon nær et punkt med en lineær funksjon:

Anta at vi vil tilnærme en funksjon nær et punkt med en lineær funksjon:

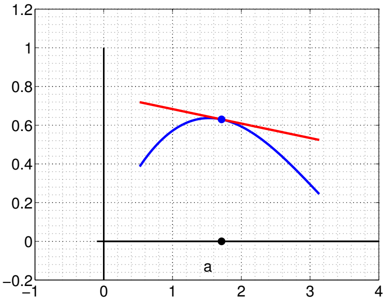



*Figure :* Approksimasjon av $f(x)$ i $x = a$ med en lineær funksjon.

**Lineariseringen til $f$ om $a$**

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Anta at vi vil tilnærme en funksjon nær et punkt med en lineær funksjon:

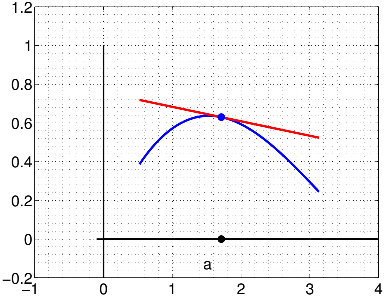



*Figure :* Approksimasjon av $f(x)$ i $x = a$ med en lineær funksjon.

**Lineariseringen til $f$ om $a$**

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \approx f(x)$$

$L(x)$ er en linæar approksimasjon av $f$ nær $a$.

# *Eksempel 1*

Finn lineariseringen af $f(x) = \sqrt{1+x}$ om $x = 0$.

# *Eksempel 1*

Finn lineariseringen af $f(x) = \sqrt{1+x}$ om $x = 0$.

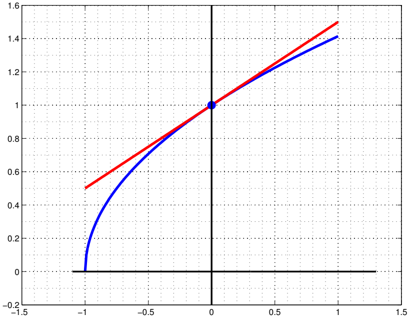



*Figure :* Approksimasjon av $\sqrt{1+x}$ i $x = 0$ med $L(x) = 1 + \frac{1}{2}x$.

# *Eksempel 3*

Bruk lineariseringen til $\sqrt{x}$ om $x = 25$ for å finne en tilnærmelse av $\sqrt{26}$.

## *Eksempel 3*

Bruk lineariseringen til $\sqrt{x}$ om $x = 25$ for å finne en tilnærmelse av $\sqrt{26}$.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

da

$$L(x) = f'(25)(x - 25) + f(25)$$

$$L(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{5}(x - 25) + 5$$

for å finne en tilnærmelse av $\sqrt{26}$ vi beregne $L(26)$,

## Eksempel 3

Bruk lineariseringen til $\sqrt{x}$ om $x = 25$ for å finne en tilnærmelse av $\sqrt{26}$.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

da

$$L(x) = f'(25)(x - 25) + f(25)$$

$$L(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{5}(x - 25) + 5$$

for å finne en tilnærmelse av $\sqrt{26}$ vi beregne $L(26)$,

$$L(26) = \frac{1}{10} + 5 = \frac{51}{10} = 5.1$$

Bruk lineariseringen til $\sqrt{x}$ om $x = 25$ for å finne en tilnærmelse av $\sqrt{26}$.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

da

$$L(x) = f'(25)(x - 25) + f(25)$$

$$L(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{5}(x - 25) + 5$$

for å finne en tilnærmelse av $\sqrt{26}$ vi beregne $L(26)$,

$$L(26) = \frac{1}{10} + 5 = \frac{51}{10} = 5.1$$

og

$$\sqrt{26} = 5.0990\ldots$$

Bruk lineariseringen til $\sqrt{x}$ om $x = 25$ for å finne en tilnærmelse av $\sqrt{26}$.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

da

$$L(x) = f'(25)(x - 25) + f(25)$$

$$L(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{5}(x - 25) + 5$$

for å finne en tilnærmelse av $\sqrt{26}$ vi beregne $L(26)$,

$$L(26) = \frac{1}{10} + 5 = \frac{51}{10} = 5.1$$

og

$$\sqrt{26} = 5.0990\ldots$$

**Hvor stor er feilen vi gjør?**

$$f(26) - L(26) = 5.0990 - 5.1 = -0.000980\ldots$$

Vi definere feilfunksjonen til å være

$$E(x) = f(x) - L(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a).$$

Vi definere feilfunksjonen til å være

$$E(x) = f(x) - L(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a).$$

Man kan vise at, hvis $f$ er to ganger deriverbar på et intervall som innholder $a$

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x-a)^2$$

der $s$ er et punkt mellom $a$ og $x$. (Teor 11 kap 4.9)

**Bevis**

Vi definere feilfunksjonen til å være

$$E(x) = f(x) - L(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a).$$

Man kan vise at, hvis $f$ er to ganger deriverbar på et intervall som innholder $a$

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x-a)^2$$

der $s$ er et punkt mellom $a$ og $x$. (Teor 11 kap 4.9)

**Bevis** bruker

**Teorem generaliserte middelverdisetning**

$F$ og $G$ kontinuerlige på $[a,b]$ og deriverbar på $(a,b)$ med $G'(t) \neq 0$ i $(a,b)$ da finnes det $c \in (a,b)$ slik at

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}$$

Hvis $f''$ har konstant fortegn mellom $a$ og $x$ da har feilen samme fortegn. Med andre ord

$$f''(t) < 0, \quad t \in (a, x) \Rightarrow E(x) < 0 \Rightarrow f(x) < L(x)$$

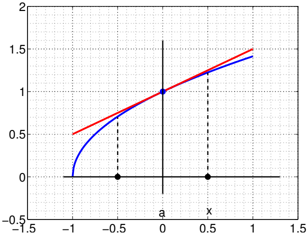



*Figure :* Approksimasjon av $\sqrt{1+x}$ i $x = 0$ med $L(x) = 1 + \frac{1}{2}x$.

Hvis $f''$ har konstant fortegn mellom $a$ og $x$ da har feilen samme fortegn. Med andre ord

$$f''(t) < 0, \quad t \in (a, x) \;\Rightarrow\; E(x) < 0 \;\Rightarrow\; f(x) < L(x)$$

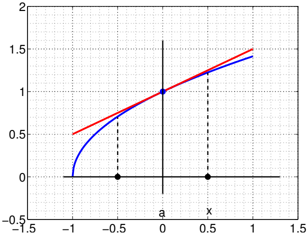



*Figure :* Approksimasjon av $\sqrt{1+x}$ i $x = 0$ med $L(x) = 1 + \frac{1}{2}x$.

ellers

$$f''(t) > 0, \quad t \in (a, x) \;\Rightarrow\; f(x) > L(x)$$

Hvis $|f''(t)| < K$ for alle $t \in (a, x)$ og $K$ er konstant da blir

$$|E(x)| < \frac{K}{2}(x-a)^2$$

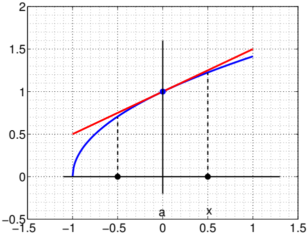



*Figure :* Approksimasjon av $\sqrt{1+x}$ i $x = 0$ med $L(x) = 1 + \frac{1}{2}x$.

For $t \in (0, 0.5)$ ($a = 0$, $x = 0.5$)
$|E(x)| < \frac{1}{2}(0.5)^2 = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125$.

# Eksempel 4

Fra eksempel 3: approkksimasjonen av $\sqrt{26}$ med lineariseringen av $\sqrt{x}$ rundt $x = 25$, vi fikk en feil

$$f(26) - L(26) = 5.0990 - 5.1 = -0.000980\ldots$$

Fra eksempel 3: approkksimasjonen av $\sqrt{26}$ med lineariseringen av $\sqrt{x}$ rundt $x = 25$, vi fikk en feil

$$f(26) - L(26) = 5.0990 - 5.1 = -0.000980\ldots$$

Vi skal skjekke feilestimaten (Teor 11, korollar B).

Fra eksempel 3: approkksimasjonen av $\sqrt{26}$ med lineariseringen av $\sqrt{x}$ rundt $x = 25$, vi fikk en feil

$$f(26) - L(26) = 5.0990 - 5.1 = -0.000980\ldots$$

Vi skal skjekke feilestimaten (Teor 11, korollar B). Vi har $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ og $|\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}| < \frac{1}{500}$ i intervallet $[25, 26]$ og da

$$|E(26)| < \frac{1}{2}\frac{1}{500}(25 - 26)^2 = 0.001$$

Hvis $M < f''(t) < N$ for alle $t \in (a, x)$ da fra feilformelen vi har

$$L(x) + \frac{M}{2}(x - a)^2 < f(x) < L(x) + \frac{N}{2}(x - a)^2$$

**Lineariseringen til $f$ om $a$**

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \approx f(x)$$

$L(x)$ er en linæar approksimasjon av $f$ nær $a$.
Vi har

$$L(a) = f(a) \quad \text{og} \quad L'(a) = f'(a).$$

**Lineariseringen til $f$ om $a$**

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \approx f(x)$$

$L(x)$ er en linæar approksimasjon av $f$ nær $a$.
Vi har

$$L(a) = f(a) \quad \text{og} \quad L'(a) = f'(a).$$

**Taylorpolynom til $f$ om $a$ av orden $n$**

Taylorpolynom er en plynomial approksimasjon $P_n(x)$ av grad $n$ til $f$ om $a$ slik at

- $P_n(a) = f(a)$
- $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ for $k = 1, \ldots, n$

**Lineariseringen til $f$ om $a$**

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \approx f(x)$$

$L(x)$ er en linær approksimasjon av $f$ nær $a$.
Vi har

$$L(a) = f(a) \quad \text{og} \quad L'(a) = f'(a).$$

**Taylorpolynom til $f$ om $a$ av orden $n$**
Taylorpolynom er en plynomial approksimasjon $P_n(x)$ av grad $n$ til $f$ om $a$ slik at

- $P_n(a) = f(a)$
- $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ for $k = 1, \ldots, n$

Taylorpolynomet er

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

**Eksempel 1** : Taylorpolynom av grad 2 for $f(x) = \sqrt{x}$ om $x = 25$.

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(25) + f'(25)(x-25) + \frac{f''(25)}{2}(x-25)^2 \\ &= 5 + \frac{1}{10}(x-25) - \frac{1}{1000}(x-25)^2 \end{aligned}$$

**Eksempel 1** : Taylorpolynom av grad 2 for $f(x) = \sqrt{x}$ om $x = 25$.

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(25) + f'(25)(x-25) + \frac{f''(25)}{2}(x-25)^2 \\ &= 5 + \frac{1}{10}(x-25) - \frac{1}{1000}(x-25)^2 \end{aligned}$$

**Eksempel 2**: finn Maclaurinpolynomet av order $n$ for $e^x$.

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Se Maple: "with(Student[NumericalAnalysis])" og "?TaylorPolynomial"

**Eksample 3.** Finn Maclaurinpolynomet for $f(x) = \sin(x)$ $P_1(x), \ldots, P_4(x)$, deretter finn

$$P_{2n-1}(x) \quad \text{og} \quad P_{2n}(x).$$

# Taylor Teorem

Hvis den $n+1$ste deriverte av $f$ eksisterer for alle $t$ i et intervall som innholder $a$ og $x$, og $P_n(x)$ er det $n$-te Taylorpolynomet for $f$ om $a$

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

da feilen $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ er

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad s \in (a, x)$$

og så

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

med $s \in (a, x)$.
Dette heter Taylorformel med Lagrange restledd.

# Big-O notasjon

Vi skriver

$$f(x) = \mathcal{O}(u(x))$$

for $x \to a$ hvis

$$|f(x)| \leq K|u(x)|$$

er tilfredstilt for en positiv konstant $K$ på et åpent intervall som innholder $x = a$.

*Example*

- $$\sin(x) = \mathcal{O}(x)$$

  nær $x = 0$.

- La $P_n(x)$ være Taylorpolynomet for $f$ om $a$, (anta $f$ er deriverbar $n+1$ ganger på en passende intervall) da

  $$f(x) = P_n(x) + \mathcal{O}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

  for $x \to a$.

**Teorem** Hvis

$$f(x) = Q_n(x) + \mathcal{O}\left((x-a)^{n+1}\right), \qquad x \to a$$

med $Q_n(x)$ et polynom av grad $n$ da er $Q_n(x) = P_n(x)$ Taylorpolynomet av orden $n$.

- Summer
- Areal under grafen til en funksjon som grenseverdi til en summe

La $m$ og $n$ være naturlige tall og $m \leq n$ og la $f$ være en funksjon definert på de naturlige tall $m, m+1, \ldots n$ da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

vi mener

# Sigma notasjon

La $m$ og $n$ være naturlige tall og $m \leq n$ og la $f$ være en funksjon definert på de naturlige tall $m, m+1, \ldots n$ da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

vi mener

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

La $m$ og $n$ være naturlige tall og $m \leq n$ og la $f$ være en funksjon definert på de naturlige tall $m, m+1, \ldots n$ da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

vi mener

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

$m$ lower limit, $n$ upper limit of summation.

La $m$ og $n$ være naturlige tall og $m \leq n$ og la $f$ være en funksjon definert på de naturlige tall $m, m+1, \ldots n$ da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

vi mener

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

$m$ lower limit, $n$ upper limit of summation.

**Eksempel 1**

$$\sum_{i=m}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

La $m$ og $n$ være naturlige tall og $m \leq n$ og la $f$ være en funksjon definert på de naturlige tall $m, m+1, \ldots n$ da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

vi mener

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

$m$ lower limit, $n$ upper limit of summation.

**Eksempel 1**

$$\sum_{i=m}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

**Eksempel 2**

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7}$$

La $m$ og $n$ være naturlige tall og $m \leq n$ og la $f$ være en funksjon definert på de naturlige tall $m, m+1, \ldots n$ da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

vi mener

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

$m$ lower limit, $n$ upper limit of summation.

**Eksempel 1**

$$\sum_{i=m}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

**Eksempel 2**

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} +$$

La $m$ og $n$ være naturlige tall og $m \leq n$ og la $f$ være en funksjon definert på de naturlige tall $m, m+1, \ldots n$ da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

vi mener

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

$m$ lower limit, $n$ upper limit of summation.

**Eksempel 1**

$$\sum_{i=m}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

**Eksempel 2**

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} +$$

La $m$ og $n$ være naturlige tall og $m \leq n$ og la $f$ være en funksjon definert på de naturlige tall $m, m+1, \ldots n$ da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

vi mener

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

$m$ lower limit, $n$ upper limit of summation.

**Eksempel 1**

$$\sum_{i=m}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

**Eksempel 2**

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} +$$

La $m$ og $n$ være naturlige tall og $m \leq n$ og la $f$ være en funksjon definert på de naturlige tall $m, m+1, \ldots n$ da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

vi mener

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

$m$ lower limit, $n$ upper limit of summation.

**Eksempel 1**

$$\sum_{i=m}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

**Eksempel 2**

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} +$$

La $m$ og $n$ være naturlige tall og $m \leq n$ og la $f$ være en funksjon definert på de naturlige tall $m, m+1, \ldots n$ da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

vi mener

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

$m$ lower limit, $n$ upper limit of summation.

**Eksempel 1**

$$\sum_{i=m}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

**Eksempel 2**

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} +$$

La $m$ og $n$ være naturlige tall og $m \leq n$ og la $f$ være en funksjon definert på de naturlige tall $m, m+1, \ldots n$ da med notasjonen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

vi mener

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

$m$ lower limit, $n$ upper limit of summation.

**Eksempel 1**

$$\sum_{i=m}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

**Eksempel 2**

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

# Egenskaper med summer

- $$\sum_{i=m}^{n} (A\,f(i) + B\,g(i)) = A \sum_{i=m}^{n} f(i) + B \sum_{i=m}^{n} g(i)$$

# Egenskaper med summer

- $$\sum_{i=m}^{n} (A\,f(i) + B\,g(i)) = A \sum_{i=m}^{n} f(i) + B \sum_{i=m}^{n} g(i)$$

- $$\sum_{j=m}^{m+n} f(j) \quad = \quad f(m) + f(m+1) + \cdots + f(m+n)$$

- $$\sum_{i=m}^{n} (A f(i) + B g(i)) = A \sum_{i=m}^{n} f(i) + B \sum_{i=m}^{n} g(i)$$

- $$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{m+n} f(j) &= f(m) + f(m+1) + \cdots + f(m+n) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(i+m) \end{aligned}$$

**Eksempel 3** Skriv $\sum_{j=3}^{17} \sqrt{1+j^2}$ i formen $\sum_{i=1}^{n} f(i)$. Hvis vi setter $j = i + 2$, da for $j = 3$ blir det $i = 1$ og for $j = 17$ blir det $i = 15$, so

$$\textstyle\sum_{j=3}^{17} \sqrt{1+j^2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{15} \sqrt{1+(i+2)^2}$$

# Lukkede former for summer

1

$$\sum_{i=1}^{n} 1$$

1

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1$$

# Lukkede former for summer

1

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

1

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

2

$$S = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Bevis**

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

## Lukkede former for summer

1
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2

$$\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{hvis } r \neq 1.$$

**Eksempel 4**

$$\sum_{k=m+1}^{n} (6k^2 - 4k + 3), \quad 1 \leq m < n.$$

La $f$ være en ikke-negativ kontinuerlig funksjon. Arealen under grafen $y = f(x)$ og mellom de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$, der $a < b$.
Del intervallet $[a, b]$ i $n$ subintervaller

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

la

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Summen

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots f(x_n)\Delta x_n$$

La $f$ være en ikke-negativ kontinuerlig funksjon. Arealen under grafen $y = f(x)$ og mellom de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$, der $a < b$.
Del intervallet $[a, b]$ i $n$ subintervaller

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

la

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Summen

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

er en tilnærmelse av arealen under grafen $y = f(x)$.