

Flere anvendelser av derivasjon

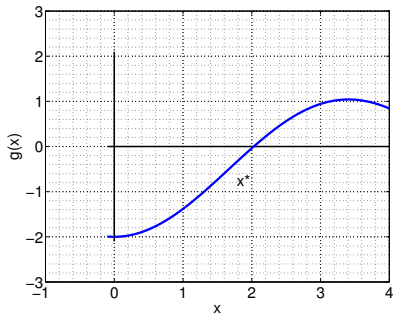
Department of Mathematical Sciences, NTNU, Norway

September 26, 2014

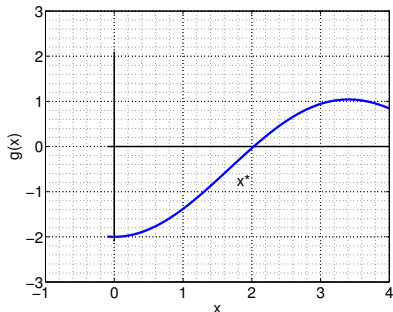
- Fikspunkt-iterasjon
- Newtons metode

Metoder for å finne nullpunkter av funksjoner: $g(x^*) = 0$

Hvis funksjonen skifter fortegn da finnes det et nullpunkt.



Hvis funksjonen skifter fortegn da finnes det et nullpunkt.

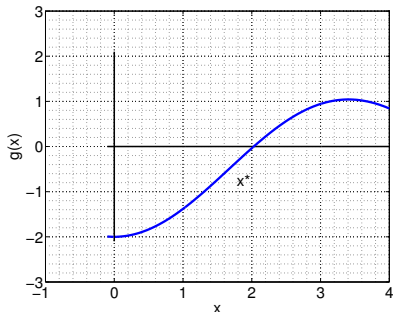


Fikspunktiterasjon er en prosedyre Φ for å forbedre tilnærming av x^* gitt en $x_n \approx x^*$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Metoder for å finne nullpunkter av funksjoner: $g(x^*) = 0$

Hvis funksjonen skifter fortegn da finnes det et nullpunkt.



Fikspunktiterasjon er en prosedyre Φ for å forbedre tilnærming av x^* gitt en $x_n \approx x^*$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Et mulig valg av ϕ er gitt av Newton metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

For kontinuerlige funksjoner på lukkede intervaller eller endelige unioner av lukkede intervaller:

- eksistens av absolutte maksima og minima (Teroem 5)
- hvor skal vi lete etter lokale maksima og minima (Teroem 6)
- hvordan skal vi avgjøre at et punkt er en lokal maksimum eller en lokalminimum ved å se på den første deriverte av f nær punktet (Teorem 7)

For kontinuerlige funksjoner på lukkede intervaller eller endelige unioner av lukkede intervaller:

- eksistens av absolutte maksima og minima (Teorem 5)
- hvor skal vi lete etter lokale maksima og minima (Teorem 6)
- hvordan skal vi avgjøre at et punkt er en lokal maksimum eller en lokalminimum ved å se på den første deriverte av f nær punktet (Teorem 7)

For kontinuerlige funksjoner på åpne intervaller

- Hvordan kan vi bruke grenseverdiene i endepunktene for å avgjøre om det finnes et absolutt maksimum eller absolutt minimum i intervallet (Teorem 8)

For kontinuerlige funksjoner på lukkede intervaller eller endelige unioner av lukkede intervaller:

- eksistens av absolutte maksima og minima (Teroem 5)
- hvor skal vi lete etter lokale maksima og minima (Teroem 6)
- hvordan skal vi avgjøre at et punkt er en lokal maksimum eller en lokalminimum ved å se på den første deriverte av f nær punktet (Teorem 7)

For kontinuerlige funksjoner på åpne intervaller

- Hvordan kan vi bruke grenseverdiene i endepunktene for å avgjøre om det finnes et absolutt maksimum eller absolutt minimum i intervallet (Teorem 8)
- Kap 4.8 løsning av en ekstremalverdiproblem

Definisjon av absolutt maximum: f har et absolutt maximum i x_0 hvis for alle $x \in \mathcal{D}(f)$ vi har

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Definisjon av absolutt maximum: f har et absolutt maximum i x_0 hvis for alle $x \in \mathcal{D}(f)$ vi har

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Definisjon av absolutt minimum: f har et absolutt minimum i x_0 hvis for alle $x \in \mathcal{D}(f)$ vi har

$$f(x) \geq f(x_0)$$

Husk: Teorem 8, kap 1.4: ekstremalverdisetning (Min-max)

Hvis f er kontinuertlig på $[a, b]$ finnes det tall p og q slik at for alle $x \in [a, b]$

$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(q) = M.$$

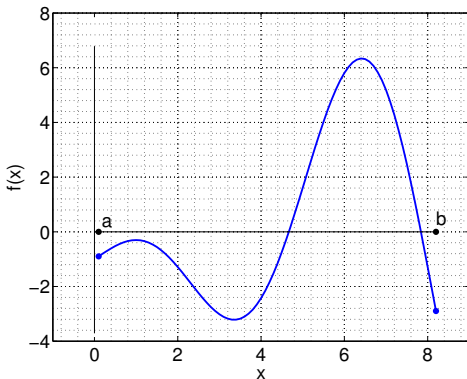
Husk: Teorem 8, kap 1.4: ekstremalverdisetning (Min-max)

Hvis f er kontinuertlig på $[a, b]$ finnes det tall p og q slik at for alle $x \in [a, b]$

$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(q) = M.$$

m minimumverdi

M maximumverdi



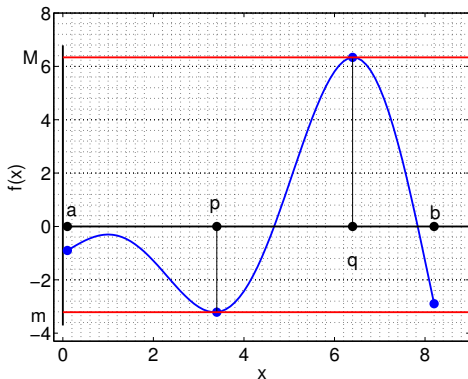
Husk: Teorem 8, kap 1.4: ekstremalverdisetning (Min-max)

Hvis f er kontinuertlig på $[a, b]$ finnes det tall p og q slik at for alle $x \in [a, b]$

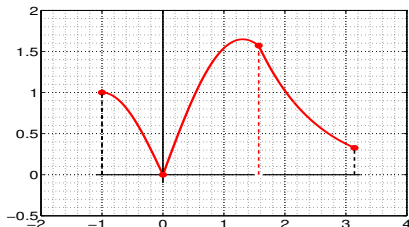
$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(q) = M.$$

m minimumverdi

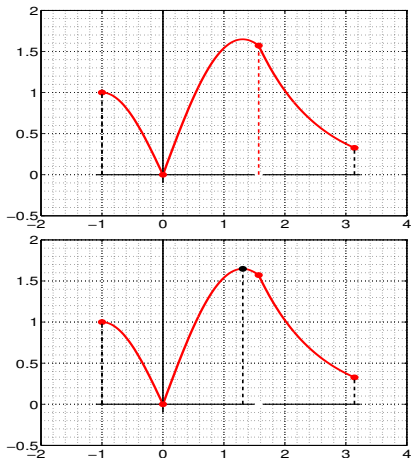
M maksimumverdi



Teorem 5 kap 4.4 Hvis f er slik at $\mathcal{D}(f)$ er enten et lukket intervall eller en endelig union av lukkede intervaller, og f er kontinuerlig, da eksisterer et absolutt maximum og et absolutt minimum for f .



Teorem 5 kap 4.4 Hvis f er slik at $\mathcal{D}(f)$ er enten et lukket intervall eller en endelig union av lukkede intervaller, og f er kontinuerlig, da eksisterer et absolutt maximum og et absolutt minimum for f .



Definisjon av lokalt maximum: f har et lokalt maximum i x_0 i $\mathcal{D}(f)$ hvis det finnes $h > 0$ slik at

$$f(x) \leq f(x_0)$$

for $x \in \mathcal{D}(f)$ og

$$|x - x_0| < h.$$

(I nærheten av x_0 oppnår f verdier som er mindre eller lik $f(x_0)$.)

Definisjon av lokalt maximum: f har et lokalt maximum i x_0 i $\mathcal{D}(f)$ hvis det finnes $h > 0$ slik at

$$f(x) \leq f(x_0)$$

for $x \in \mathcal{D}(f)$ og

$$|x - x_0| < h.$$

(I nærheten av x_0 oppnår f verdier som er mindre eller lik $f(x_0)$.)

Definisjon av lokalt minimum: f har et lokalt minimum i x_0 i $\mathcal{D}(f)$ hvis det finnes $h > 0$ slik at

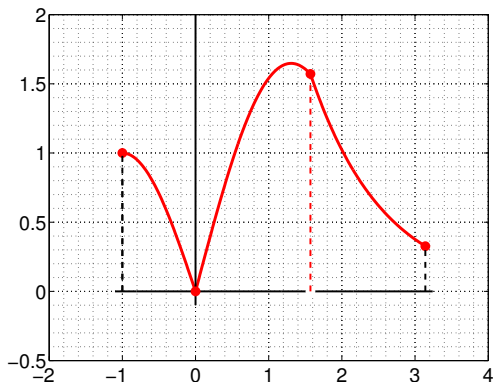
$$f(x) \geq f(x_0)$$

for $x \in \mathcal{D}(f)$ og

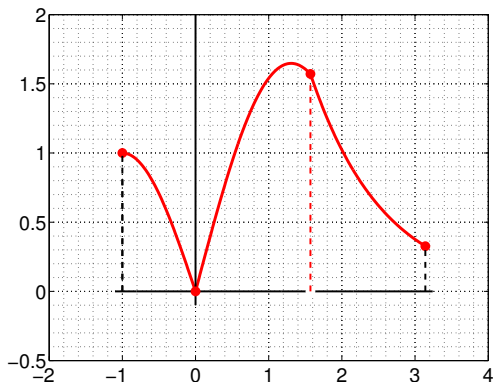
$$|x - x_0| < h.$$

(I nærheten av x_0 oppnår f verdier som er større eller lik $f(x_0)$.)

Å finne maxima og minima



Å finne maxima og minima



Teorem 6: Hvis f er definert på et intervall I og f har et lokalt maksimum (eller et lokalt minimum) i et punkt $x_0 \in I$ da må x_0 være enten

- 1 et punkt der $f'(x) = 0$ (kritiskpunkt);
- 2 eller et punkt der f' er ikke definert (singularpunkt);
- 3 eller et endepunkt.

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \quad x \in [-2, 2].$$

Eksempel 1

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \quad x \in [-2, 2].$$

Løsning: se på

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \quad x \in [-2, 2],$$

den er definert over alt på $[-2, 2]$ da finnes ikke noe singulære punkter (tilfellet 2 teorem 6 er utelukket her). Vi fokuserer på kritiskepunkter og endepunktene.

$$g'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

vi løser den andregradsligningen og finner at $x = -1$ og $x = 3$ er kritiskepunkter. Men $x = 3$ er utenfor domenet til funksjonen, derfor kan vi droppe $x = 3$. Vi ser på $x = -1$, $g(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$. Til slutt ser vi på endepunktene (tilfellet 3 i teorem 6):

$$g(-2) = -8 - 12 + 18 + 2 = 0$$

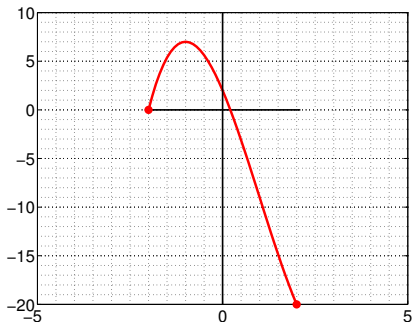
$$g(2) = 8 - 12 - 18 + 2 = -20$$

Da har vi et absolutt maksimum i $x = -1$, $g(-1) = 7$ og et absolutt minimum i $x = 2$ $g(2) = -20$.

Eksempel 1

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \quad x \in [-2, 2].$$



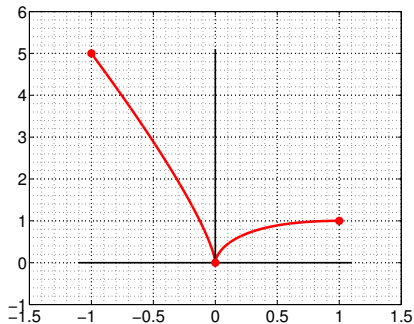
Ved en grafisk kalkulator er dette mye enklere (men grafiske kalkulatorer er ikke alltid tilgjengelig).

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = 3x^{2/3} - 2x, \quad x \in [-1, 1].$$

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = 3x^{2/3} - 2x, \quad x \in [-1, 1].$$



Teorem 7, del 1

Vi ser der $f'(x) = 0$ og der f' er ikke definert. Anta f er kontinuerlig og x_0 er ikke et endepunkt.

- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) > 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) < 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt maximum.

Teorem 7, del 1

Vi ser der $f'(x) = 0$ og der f' er ikke definert. Anta f er kontinuerlig og x_0 er ikke et endepunkt.

- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) > 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) < 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt maximum. (f avtar før x_0 og vokser etter x_0)
- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) < 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) > 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt minimum.

Teorem 7, del 1

Vi ser der $f'(x) = 0$ og der f' er ikke definert. Anta f er kontinuerlig og x_0 er ikke et endepunkt.

- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) > 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) < 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt maximum. (f avtar før x_0 og vokser etter x_0)
- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) < 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) > 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt minimum. (f avtar før x_0 og vokser etter x_0)

Teorem 7, del 2

Anta a er venstre endepunkt av domenet og f er høyrekontinuerlig i a .

- Hvis $f'(x) > 0$ på et intervall (a, b) , da har f et lokalt minimum i a .
- Hvis $f'(x) < 0$ på et intervall (a, b) , da har f et lokalt maximum i a .

Anta b er høyre endepunkt av domenet og f er venstrekontinuerlig i b .

- Hvis $f'(x) > 0$ på et intervall (a, b) , da har f et lokalt maximum i a .
- Hvis $f'(x) < 0$ på et intervall (a, b) , da har f et lokalt minimum i a .

Finn de lokale og absolutte minima og maksima av

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$$

Finn de lokale og absolutte minima og maksima av $f(x) = x - x^{2/3}$

Merknad Det er ikke tilstrekkelig at $f'(x_0) = 0$ for at f har en ekstremalverdi i x_0 .

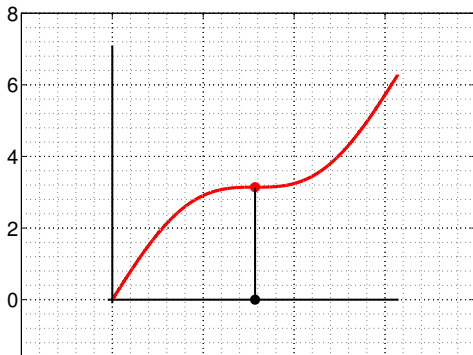
Example

Betrakt $f(x) = \sin(x) + x$ som har deriverte $f'(x) = \cos(x) + 1$.

Merknad Det er ikke tilstrekkelig at $f'(x_0) = 0$ for at f har en ekstremalverdi i x_0 .

Example

Betrakt $f(x) = \sin(x) + x$ som har deriverte $f'(x) = \cos(x) + 1$. f' er null i π men f har verken et maximum eller et minimum i $x = \pi$ (men et infleksjonspunkt).



Teorem 8: ekstremale vedier på åpne intervaller

La f være kontinuerlig i (a, b) åpen intervall og

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = M$$

da

- hvis $f(u) > L$ og $f(u) > M$ for noen $u \in (a, b)$ da f har et absolutt maximum i (a, b)
- hvis $f(v) < L$ og $f(v) < M$ for noen $v \in (a, b)$ da f har et absolutt minimum i (a, b)

a kan her erstattes med $-\infty$ og b kan erstattes med $+\infty$ og i tillegg kan L og M erstattes med både $+\infty$ og $-\infty$.

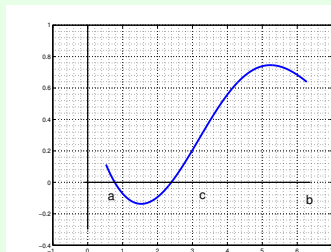
Example

Vis at $f(x) = x + (4/x)$ har et absolutt minimum på intervallet $(0, \infty)$, finn minimumsverdien.

Eksempel 5 En person kan løpe to ganger furtere enn hun kan svømme. Hun står i et punkt A ved siden av en sirkelformet svømmebaseng (med diameter av 40 meter). Hun vil komme så fort som mulig til punkt B som er diametralt motsatt i forhold til A . Planen er å løpe først rundt perimeteren av basenget til punkt C og så legge på svøm langs en rettlinje til B . Hvor skal C ligge for at den totale tiden fra A til B minimeres?

- Bøyning av funksjonen på et åpen intervall: konkavitet konveksitet.
- Infleksjonspunkter (vendepunkter)
- Grafer av funksjoner
- L'Hopitals regel

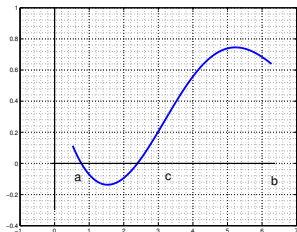
Bøyning av funksjonen f på et intervall I



- i intervallet $[a, c)$ er f bøyd oppover (konkav opp)
- i intervallet $(c, b]$ er f bøyd nedover (konkav ned)

Kan vi beskrive “bøyd oppover”, “bøyd nedover” matematisk?

Vi ser på f' som stigningstallet til tangenten i hver punkt til f :



- f' vokser i intervallet $[a, c)$ (dvs $f''(x) > 0$)
- f' avtar i intervallet $(c, b]$ (dvs $f''(x) < 0$)
- i punktet c slutter f' å vokse og begynner å avta (dvs f'' går fra å være positiv til å være negativ, $f''(c) = 0$)

Definisjon av konkav opp funksjon: f er **konkav opp** i det åpne intervallet (a, c) hvis f' vokser i (a, c) (det vil si hvis f'' er positiv i (a, c))

Definisjon av konkav opp funksjon: f er **konkav opp** i det åpne intervallet (a, c) hvis f' vokser i (a, c) (det vil si hvis f'' er positiv i (a, c))



Figure : f venstre, f'' høyre

Definisjon av konkav ned funksjon: f er **konkav ned** i det åpne intervallet (c, b) hvis f' avtar i (c, b) (det vil si hvis f'' er negativ i (c, b))

Definisjon av konkav ned funksjon: f er **konkav ned** i det åpne intervallet (c, b) hvis f' avtar i (c, b) (det vil si hvis f'' er negativ i (c, b))

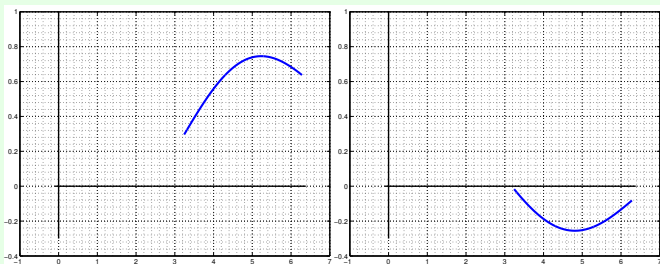


Figure : f venstre, f'' høyre

Definisjon: et punkt $(c, f(c))$ er et **infleksjonspunkt** for f hvis

- f' er definert c eller grafen til f har en vertikal tangent i c
- og f skifter fra å være konkav opp til å være konkav ned (eller omvendt) i punktet c

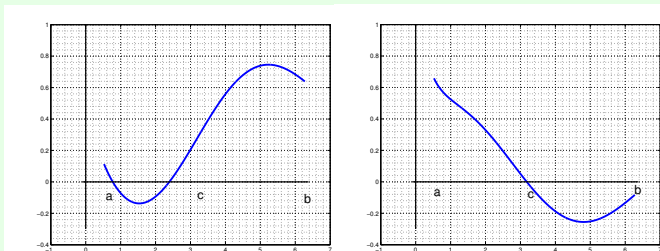


Figure : f venstre, f'' høyre

Gitt

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$$

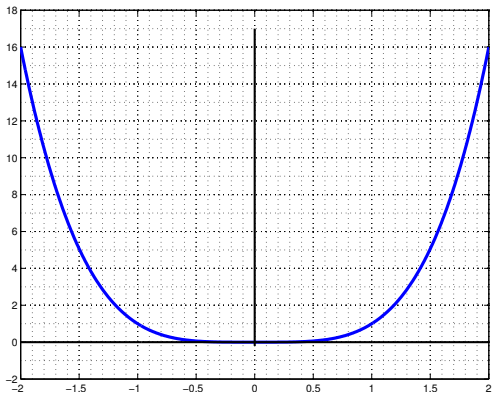
finn lokale ekstremaleverdier, konkavitet av f , så tegn grafen til f .

Teorem 10 La f være kontinuerlig og deriverbar to ganger

- Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) < 0$ da har f et lokalt maksimum i x_0 .
- Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) > 0$ da har f et lokalt minimum i x_0 .
- Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) = 0$ da kan man ikke konkludere. f kan ha enten et lokalt maksimum eller et lokalt minimum eller et infleksjonspunkt i x_0 .

$$f(x) = x^4$$

$$f(x) = x^4$$



Det er tre typer asymptoter

- vertikale asymptoter i $x = a$ hvis:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{eller begge}$$

- horizontale asymptoter i $y = L$ hvis

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \text{eller} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{eller begge}$$

- skrå asymptoter: en linje $y = ax + b$ ($a \neq 0$) er en asymptot for f hvis

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{eller} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{eller begge}$$

Man bruker all informasjon man kan finne om f , f' og f'' (hvis f lar seg derivere).

- finn nullpunkter til f og der f er positiv og negativt (om mulig)
- finn der funksjonen vokser og avtar
- finn maksima og minima
- finn infleksjonspunkter
- finn der hvor f er konkav og der den er konveks
- finn asymptotene til f

En mer fullstendig checkliste finnes i kap 4.6 side 249.

Type	Eksempel
$[0/0]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1}{x^2})}{\cot(x^2)}$
$[0 \cdot \infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\frac{1}{x})$
$[\infty - \infty]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan(x) - \frac{1}{\pi - 2x})$
$[0^0]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
$[\infty^0]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$

For ubestemteformer av type $[0/0]$ og $[\infty/\infty]$ man kan bevise

Teorem 3 Kap 4.3

La f og g være deriverbare på intervallet (a, b) og $g'(x) \neq 0$ på (a, b) . Anta

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ og
- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (med L et reell tall eller $\pm\infty$)

da

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

For ubestemteformer av type $[0/0]$ og $[\infty/\infty]$ man kan bevise

Teorem 3 Kap 4.3

La f og g være deriverbare på intervallet (a, b) og $g'(x) \neq 0$ på (a, b) . Anta

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ og
- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (med L et reell tall eller $\pm\infty$)

da

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

I beviset bruker man den **generaliserte middelveisestning** kap 2.8 Teor 16:

For ubestemteformer av type $[0/0]$ og $[\infty/\infty]$ man kan bevise

Teorem 3 Kap 4.3

La f og g være deriverbare på intervallet (a, b) og $g'(x) \neq 0$ på (a, b) . Anta

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ og
- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (med L et reell tall eller $\pm\infty$)

da

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

I beviset bruker man den **generaliserte middelveisestning** kap 2.8 Teor 16:

Teorem generaliserte middelveisestning

F og G kontinuerlige på $[a, b]$ og deriverbar på (a, b) med $G'(x) \neq 0$ i (a, b) da finnes det $c \in (a, b)$ slik at

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}$$

Oppgave 18 Kap 4.8

En boks lages ut av en rektangel av papp med dimensjoner **70** ganger **150** cm, ved å skjære 4 like firkanter fra gjørnene og ved å brette opp de 4 sidene for å forme boksen (boksen har ingen top). Hva er den største mulige volumen for boksen?

Oppgave 18 Kap 4.8

En boks lages ut av en rektangel av papp med dimensjoner 70 ganger 150 cm, ved å skjære 4 like firkanter fra gjørnene og ved å brette opp de 4 sidene for å forme boksen (boksen har ingen top). Hva er den største mulige volumen for boksen?

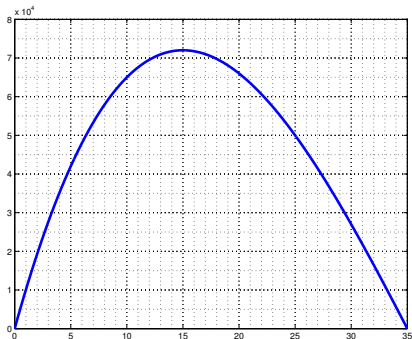


Figure : Volumet av boksen som funksjon av kanten til firkantene som skjæres av.

