Flere anvendelser av derivasjon

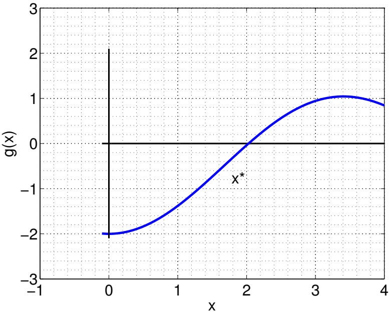
Department of Mathematical Sciences, NTNU, Norway

September 23, 2014

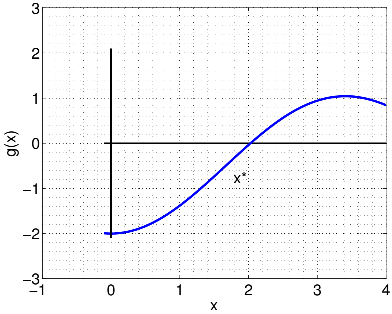
Forelesning 17.09.2014

- Fikspunkt-iterasjon
- Newtons metode

Hvis funksjonen skifter fortegn da finnes det et nullpunkt.



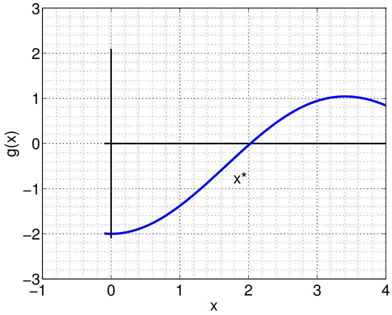
Hvis funksjonen skifter fortegn da finnes det et nullpunkt.



Fikspunktiterasjon er en prosedyre Φ for å forbedre tilnærmelse av x^* gitt en $x_n \approx x^*$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Hvis funksjonen skifter fortegn da finnes det et nullpunkt.



Fikspunktiterasjon er en prosedyre Φ for å forbedre tilnærmelse av x^* gitt en $x_n \approx x^*$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Et mulig valg av ϕ er gitt av Newton metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

For kontinuerlige funksjoner på lukkede intervaller eller endelige unioner av lukkede intervaller:

- eksistens av absolutte maksima og minima (Teroem 5)
- hvor skal vi lete etter lokale maksima og minima (Teroem 6)
- hvordan skal vi avgjøre at et punkt er en lokal maksimum eller en lokalminimum ved å se på den første deriverte av f nær punktet (Teorem 7)

For kontinuerlige funksjoner på lukkede intervaller eller endelige unioner av lukkede intervaller:

- eksistens av absolutte maksima og minima (Teroem 5)
- hvor skal vi lete etter lokale maksima og minima (Teroem 6)
- hvordan skal vi avgjøre at et punkt er en lokal maksimum eller en lokalminimum ved å se på den første deriverte av f nær punktet (Teorem 7)

For kontinuerlige funksjoner på åpne intervaller

- Hvordan kan vi bruke grenseverdiene i endepunktene for å avgjøre om det finnes et absolutt maksimum eller absolutt minimum i intervallet (Teorem 8)

For kontinuerlige funksjoner på lukkede intervaller eller endelige unioner av lukkede intervaller:

- eksistens av absolutte maksima og minima (Teroem 5)
- hvor skal vi lete etter lokale maksima og minima (Teroem 6)
- hvordan skal vi avgjøre at et punkt er en lokal maksimum eller en lokalminimum ved å se på den første deriverte av f nær punktet (Teorem 7)

For kontinuerlige funksjoner på åpne intervaller

- Hvordan kan vi bruke grenseverdiene i endepunktene for å avgjøre om det finnes et absolutt maksimum eller absolutt minimum i intervallet (Teorem 8)

- Kap 4.8 løsning av en ekstremalverdiprobelm

Definisjon av absolutt maximum: f har et absolutt maximum i x_0 hvis for alle $x \in \mathcal{D}(f)$ vi har

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Definisjon av absolutt maximum: f har et absolutt maximum i x_0 hvis for alle $x \in \mathcal{D}(f)$ vi har

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Definisjon av absolutt mimimum: f har et absolutt minimum i x_0 hvis for alle $x \in \mathcal{D}(f)$ vi har

$$f(x) \geq f(x_0)$$

Husk: *Teorem 8, kap 1.4: ekstremalverdisetning (Min-max)*

Hvis f er kontinuerlig på $[a,b]$ finnes det tall p og q slik at for alle $x \in [a,b]$

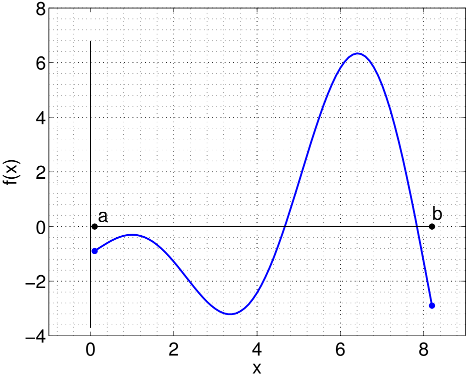
$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(p) = M.$$

Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$ finnes det tall p og q slik at for alle $x \in [a, b]$

$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(p) = M.$$

m minimumverdi

M maximumverdi



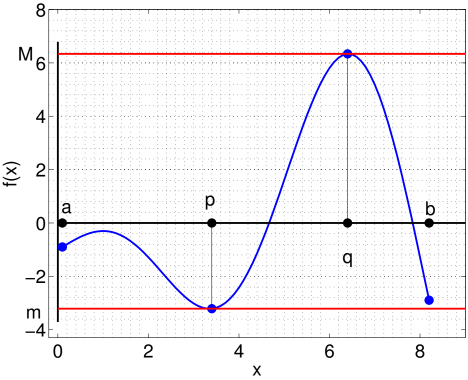
Husk: *Teorem 8, kap 1.4: ekstremalverdisetning (Min-max)*

Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$ finnes det tall p og q slik at for alle $x \in [a, b]$

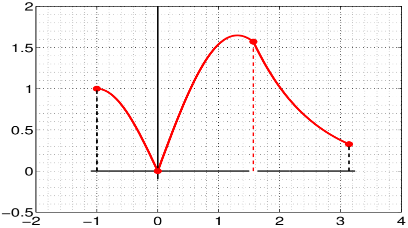
$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(p) = M.$$

m minimumverdi

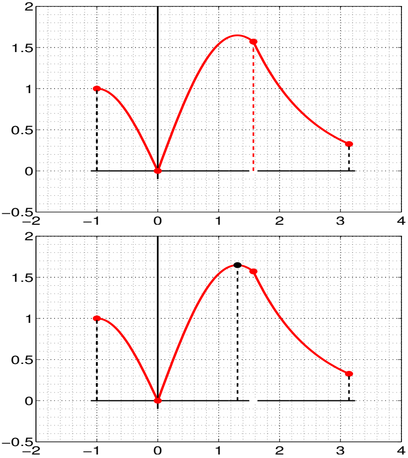
M maximumverdi



Teorem 5 kap 4.4 Hvis f er slik at $\mathcal{D}(f)$ er enten et lukket intervall eller en endelig union av lukkede intervaller, og f er kontinuerlig, da eksisterer et absolutt maximum og et absolutt minimum for f.



Teorem 5 kap 4.4 Hvis f er slik at $\mathcal{D}(f)$ er enten et lukket intervall eller en endelig union av lukkede intervaller, og f er kontinuerlig, da eksisterer et absolutt maximum og et absolutt minimum for f.



Definisjon av lokalt maximum: f har et lokalt maximum i x_0 i $\mathcal{D}(f)$ hvis det finnes $h > 0$ slik at

$$f(x) \leq f(x_0)$$

for $x \in \mathcal{D}(f)$ og

$$|x - x_0| < h.$$

(I næarheten av x_0 oppnår f verdier som er mindre eller lik $f(x_0)$.)

Definisjon av lokalt maximum: f har et lokalt maximum i x_0 i $\mathcal{D}(f)$ hvis det finnes $h > 0$ slik at

$$f(x) \le f(x_0)$$

for $x \in \mathcal{D}(f)$ og

$$|x - x_0| < h.$$

(I næarheten av x_0 oppnår f verdier som er mindre eller lik $f(x_0)$.)

Definisjon av lokalt minimum: f har et lokalt minimum i x_0 i $\mathcal{D}(f)$ hvis det finnes $h > 0$ slik at

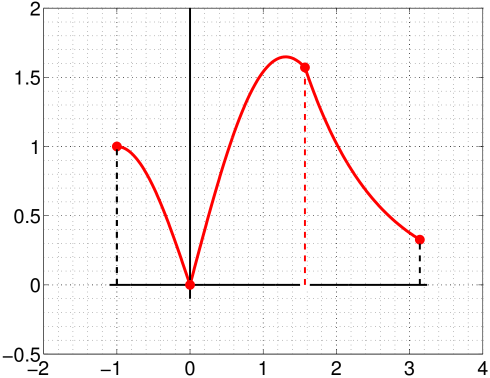
$$f(x) \ge f(x_0)$$

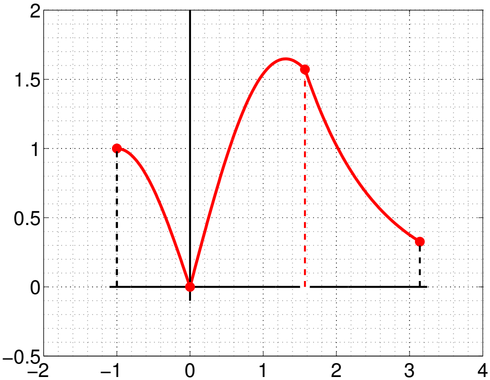
for $x \in \mathcal{D}(f)$ og

$$|x - x_0| < h.$$

(I næarheten av x_0 oppnår f verdier som er større eller lik $f(x_0)$.)

Å finne maxima og minima





Teorem 6: Hvis f er definert på et intervall I og f har et lokalt maksimum (eller et lokalt minimum) i et punkt $x_0 \in I$ da må x_0 være enten

1. et punkt der $f'(x) = 0$ (kritiskpunkt);
2. eller et punkt der f' er ikke definert (singularpunkt);
3. eller et endepunkt.

Eksempel 1

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \qquad x \in [-2, 2].$$

Eksempel 1

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \qquad x \in [-2, 2].$$

Løsning: se på

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \qquad x \in [-2, 2],$$

den er definert over alt på $[-2, 2]$ da finnes ikke noe singulære punkter (tilfellet 2 teroem 6 er utelukket her). Vi fokuserer på kritiskepunkter og endepunktene.

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

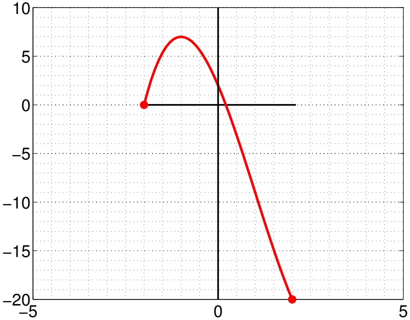
vi løser den adregradsligningen og finner at $x = -1$ og $x = 3$ er kritiskepunkter. Men $x = 3$ er utenfør domenet til fiunksjonen, derfor kan vi droppe $x = 3$. Vi ser på $x = -1$, $g(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$. Til slutt ser vi på endepunktene (tilfellet 3 i teorem 6):

$$\begin{aligned} g(-2) &= -8 - 12 + 18 + 2 = 0 \\ g(2) &= 8 - 12 - 18 + 2 = -20 \end{aligned}$$

Da har vi et absolutt maksimum i $x = -1$, $g(-1) = 7$ og et absolutt minimum i $x = 2$ $g(-2) = 20$.

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \qquad x \in [-2, 2].$$



Ved en grafisk kalkulator er dette mye enklere (men grafiske kalkulatorer er ikke alltid tilgjengelig).

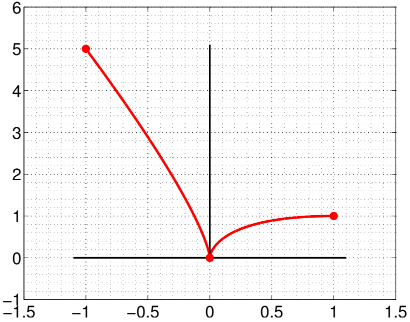
Eksempel 2

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = 3x^{2/3} - 2x, \qquad x \in [-1, 1].$$

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = 3x^{2/3} - 2x, \qquad x \in [-1, 1].$$



Teorem 7, del 1

Vi ser der $f'(x) = 0$ og der f' er ikke definert. Anta f er kontinuerlig og x_0 er ikke et endepunkt.

- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) > 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) < 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt maximum.

Teorem 7, del 1

Vi ser der $f'(x) = 0$ og der f' er ikke definert. Anta f er kontinuerlig og x_0 er ikke et endepunkt.

- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) > 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) < 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt maximum. (f avtar før x_0 og vokser etter x_0)
- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) < 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) > 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt minimum.

Teorem 7, del 1

Vi ser der $f'(x) = 0$ og der f' er ikke definert. Anta f er kontinuerlig og x_0 er ikke et endepunkt.

- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) > 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) < 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt maximum. (f avtar før x_0 og vokser etter x_0)
- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) < 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) > 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt minimum. (f avtar før x_0 og vokser etter x_0)

Teorem 7, del 2

Anta a er venstre endepunkt av domenet og f er høyrekontinuerlig i a.

- Hvis $f'(x) > 0$ på et intervall (a, b), da har f et lokalt minimum i a.
- Hvis $f'(x) < 0$ på et intervall (a, b), da har f et lokalt maximum i a.

Anta b er høyre endepunkt av domenet og f er venstrekontinuerlig i b.

- Hvis $f'(x) > 0$ på et intervall (a, b), da har f et lokalt maximum i a.
- Hvis $f'(x) < 0$ på et intervall (a, b), da har f et lokalt minimum i a.

Finn de lokale og absolutte minima og maksima av
$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

Eksempel 5

Finn de lokale og absolutte minima og maksima av $f(x) = x - x^{2/3}$

Merknad Det er ikke tilstrekkelig at $f'(x_0) = 0$ for at f har en ekstremalverdi i x_0.

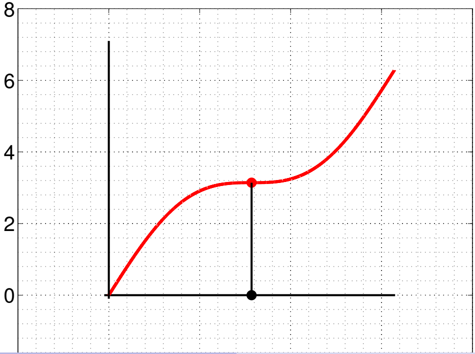
Example

Betrakt $f(x) = sin(x) + x$ som har deriverte $f'(x) = \cos(x) + 1$.

Merknad Det er ikke tilstrekkelig at $f'(x_0) = 0$ for at f har en ekstremalverdi i x_0.

Example

Betrakt $f(x) = sin(x) + x$ som har deriverte $f'(x) = \cos(x) + 1$. f' er null i π men f har verken et maximum eller et mimimum i $x = \pi$ (men et infleksjonspunkt).



Teorem 8: ekstremale vedier på åpne intervaller

La f være kontinuerlig i (a, b) åpen intervall og

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L, \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = M$$

da

- hvis $f(u) > L$ og $f(u) > M$ for noen $u \in (a, b)$ da f har et absolutt maximum i (a, b)
- hvis $f(v) < L$ og $f(v) < M$ for noen $v \in (a, b)$ da f har et absolutt minimum i (a, b)

a kan her erstattes med $-\infty$ og b kan erstattes med $+\infty$ og i tillegg kan L og M erstattes med både $+\infty$ og $-\infty$.

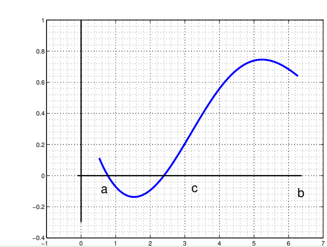
Example

Vis at $f(x) = x + (4/x)$ har et absolutt minimum på intervallet $(0, \infty)$, finn minimumsverdien.

Eksempel 5 En person kan løpe to ganger furtere enn hun kan svømme. Hun står i et punkt A ved siden av en sirkelformet svømmebaseng (med diameter av 40 meter). Hun vil komme så fort som mulig til punkt B som er diametralt motsatt i forhold til A. Planen er å løpe først rundt perimeteren av basenget til punkt C og så legge på svøm langs en rettlinje til B. Hvor skal C ligge for at den totale tiden fra A til B minimeres?

- Bøyning av funksjonen på et åpen intervall: konkavitet konveksitet.
- Infleksjonspunkter (vendepunkter)
- Grafer av funksjoner
- L'Hopitals regel

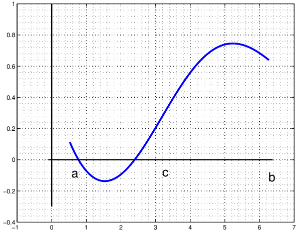
Example



- i intervallet $[a, c)$ er f bøyd oppover (konveks)
- i intervallet $(c, b]$ er f bøyd nedover (konkav)

Kan vi beskrive "bøyd oppover", "bøyd nedover" matematisk?

Vi ser på f' som stigningstallet til tangenten i hver punkt til f:



- f' vokser i intervallet $[a, c)$ (dvs $f''(x) > 0$)
- f' avtar i intervallet $(c, b]$ (dvs $f''(x) < 0$)
- i punktet c slutter f' å vokse og beginner å avta (dvs f'' går fra å være positiv til å være negativ, $f''(c) = 0$)

Definisjon av konveks funksjon: f er **konveks** i det åpne intervallet (a, c) hvis f' vokser i (a, c) (det vil si hvis f'' er positiv i (a, c))

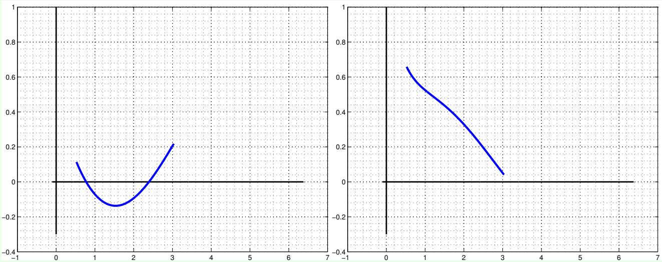


Figure : f venstre, f'' høyre

Definisjon av konkav funksjon: f er **konkav** i det åpne intervallet (a, c) hvis f' avtar i (a, c) (det vil si hvis f'' er negativ i (a, c))

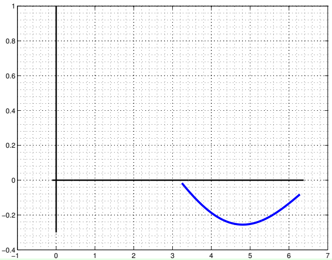


Figure : f venstre, f'' høyre

Definisjon: et punkt $(c, f(c))$ er et **infleksjonspunkt** for f hvis

- f' er definert c eller grafen til f har en vertikal tangent i c
- og f skifter fra å være konveks til å være konkav (eller omvendt) i punktet c

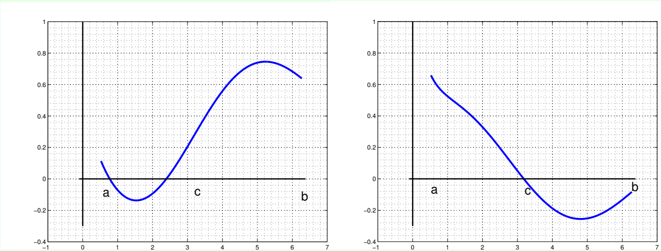


Figure : f venstre, f'' høyre

Gitt

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$$

finn lokale ekstremaleverdier, konkavitet/konveksitet av f, så tegn grafen til f.

Teorem 10 La f være kontinuerlig og deriverbar to ganger

- Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) < 0$ da har f et lokalt maksimum i x_0.
- Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) > 0$ da har f et lokalt mimimum i x_0.
- Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) = 0$ da kan man ikke konkludere. f kan ha enten et lokalt maksimum eller et lokalt minimum eller et infleksjonspunkt i x_0.

Eksempel

$$f(x) = x^4$$

Det er tre typer asymptoter

- vertikale asymptoter i $x = a$ hvis:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{eller begge}$$

- horizontale asymptoter i $y = L$ hvis

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = L \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L \qquad \text{eller begge}$$

- oblikve asymptoter: en linje $y = ax + b$ ($a \neq 0$) er en asymptot for f hvis

$$\lim_{x\to -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0 \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x\to \infty} (f(x) - (ax+b)) = 0 \quad \text{eller begge}$$

Man bruker all informasjon man kan finne om f, f' og f'' (hvis f lar seg derivere).

- finne nullpunkter til f og der f er positiv og nevativt (om mulig)
- finne der funksjonen vokser og avtar
- finne maksima og minima
- finne infleksjonspunkter
- finne der hvor f er konkav og der den er konveks
- finne asymptotene til f

En mer fullstendig checkliste finnes i kap 4.6 side 249.

Type	Eksempel
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{1}{x^2})}{\cot(x^2)}$
$[0\cdot\infty]$	$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\frac{1}{x})$
$[\infty-\infty]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\pi-2x}\right)$
$[0^0]$	$\lim_{x\to 0^+} x^x$
$[\infty^0]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

For ubestemteformer av type $[0/0]$ og $[\infty/\infty]$ man kan bevise
Teorem 3 Kap 4.3
La f og g være deriverbare på intervallet (a,b) og $g'(x) \neq 0$ på (a,b). Anta

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ og
- $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (med L et reell tall eller $\pm\infty$)

da

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$