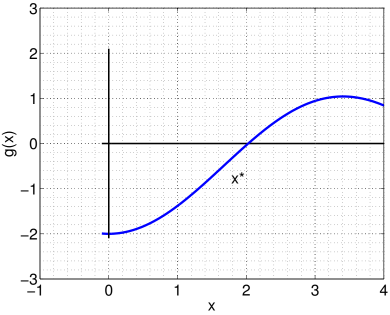
Flere anvendelser av derivasjon

Department of Mathematical Sciences, NTNU, Norway

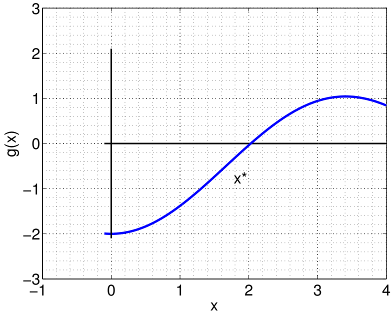
September 22, 2014

- Fikspunkt-iterasjon
- Newtons metode

Hvis funksjonen skifter fortegn da finnes det et nullpunkt.



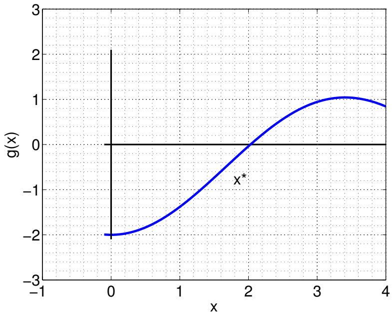
Hvis funksjonen skifter fortegn da finnes det et nullpunkt.



Fikspunktiterasjon er en prosedyre Φ for å forbedre tilnærmelse av x^* gitt en $x_n \approx x^*$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Hvis funksjonen skifter fortegn da finnes det et nullpunkt.



Fikspunktiterasjon er en prosedyre Φ for å forbedre tilnærmelse av x^* gitt en $x_n \approx x^*$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Et mulig valg av ϕ er gitt av Newton metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

For kontinuerlige funksjoner på lukkede intervaller eller endelige unioner av lukkede intervaller:

- eksistens av absolutte maksima og minima (Teroem 5)
- hvor skal vi lete etter lokale maksima og minima (Teroem 6)
- hvordan skal vi avgjøre at et punkt er en lokal maksimum eller en lokalminimum ved å se på den første deriverte av f nær punktet (Teorem 7)

For kontinuerlige funksjoner på åpne intervaller

- Hvordan kan vi bruke grenseverdiene i endepunktene for å avgjøre om det finnes et absolutt maksimum eller absolutt minimum i intervallet

- Kap 4.8 løsning av en ekstremalverdiprobelm

Definisjon av absolutt maximum: f har et absolutt maximum i x_0 hvis for alle $x \in \mathcal{D}(f)$ vi har

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Abbsolutt maximum og absolutt minimum

Definisjon av absolutt maximum: f har et absolutt maximum i x_0 hvis for alle $x \in \mathcal{D}(f)$ vi har

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Definisjon av absolutt mimimum: f har et absolutt minimum i x_0 hvis for alle $x \in \mathcal{D}(f)$ vi har

$$f(x) \geq f(x_0)$$

Husk: *Teorem 8, kap 1.4: ekstremalverdisetning (Min-max)*

Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$ finnes det tall p og q slik at for alle $x \in [a, b]$

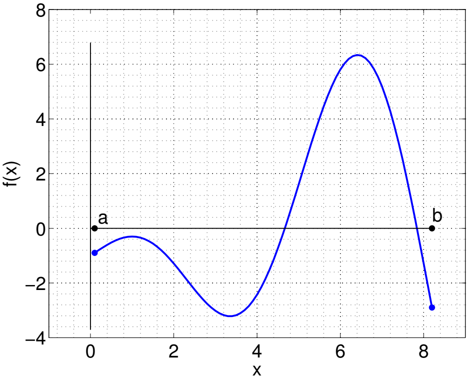
$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(p) = M.$$

Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$ finnes det tall p og q slik at for alle $x \in [a, b]$

$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(p) = M.$$

m minimumverdi

M maximumverdi



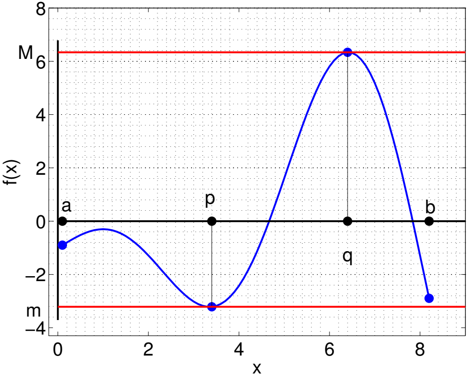
Husk: *Teorem 8, kap 1.4: ekstremalverdisetning (Min-max)*

Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$ finnes det tall p og q slik at for alle $x \in [a, b]$

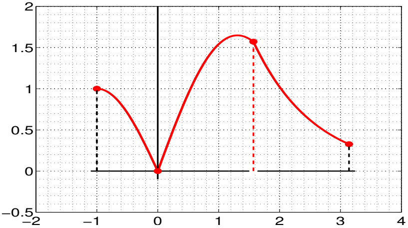
$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(p) = M.$$

m minimumverdi

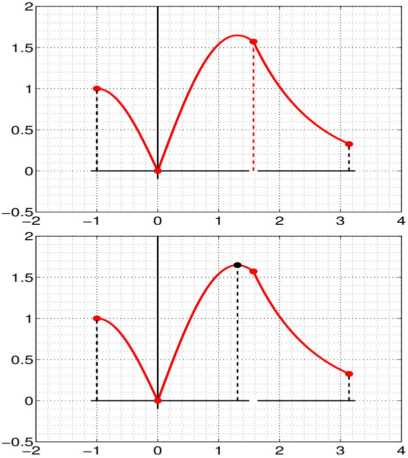
M maximumverdi



Teorem 5 kap 4.4 Hvis f er slik at $\mathcal{D}(f)$ er enten et lukket intervall eller en endelig union av lukkede intervaller, og f er kontinuerlig, da eksisterer et absolutt maximum og et absolutt minimum for f.



Teorem 5 kap 4.4 Hvis f er slik at $\mathcal{D}(f)$ er enten et lukket intervall eller en endelig union av lukkede intervaller, og f er kontinuerlig, da eksisterer et absolutt maximum og et absolutt minimum for f.



Definisjon av lokalt maximum: f har et lokalt maximum i x_0 i $\mathcal{D}(f)$ hvis det finnes $h > 0$ slik at

$$f(x) \le f(x_0)$$

for $x \in \mathcal{D}(f)$ og

$$|x - x_0| < h.$$

(I næarheten av x_0 oppnår f verdier som er mindre eller lik $f(x_0)$.)

Definisjon av lokalt maximum: f har et lokalt maximum i x_0 i $\mathcal{D}(f)$ hvis det finnes $h > 0$ slik at

$$f(x) \leq f(x_0)$$

for $x \in \mathcal{D}(f)$ og

$$|x - x_0| < h.$$

(I næarheten av x_0 oppnår f verdier som er mindre eller lik $f(x_0)$.)

Definisjon av lokalt minimum: f har et lokalt minimum i x_0 i $\mathcal{D}(f)$ hvis det finnes $h > 0$ slik at

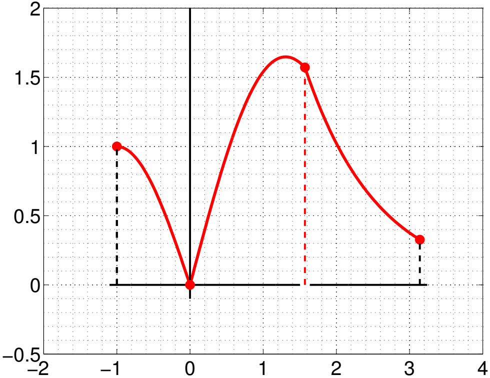
$$f(x) \geq f(x_0)$$

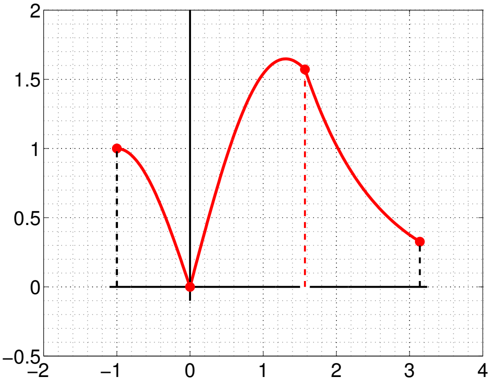
for $x \in \mathcal{D}(f)$ og

$$|x - x_0| < h.$$

(I næarheten av x_0 oppnår f verdier som er større eller lik $f(x_0)$.)

Å finne maxima og minima





Teorem 6: Hvis f er definert på et intervall I og f har et lokalt maksimum (eller et lokalt minimum) i et punkt $x_0 \in I$ da må x_0 være enten

1. et punkt der $f'(x) = 0$ (kritiskpunkt);
2. eller et punkt der f' er ikke definert (singularpunkt);
3. eller et endepunkt.

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \qquad x \in [-2, 2].$$

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

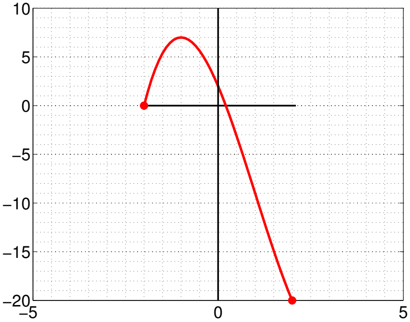
$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \qquad x \in [-2, 2].$$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \qquad x \in [-2, 2].$$

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \qquad x \in [-2, 2].$$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \qquad x \in [-2, 2].$$

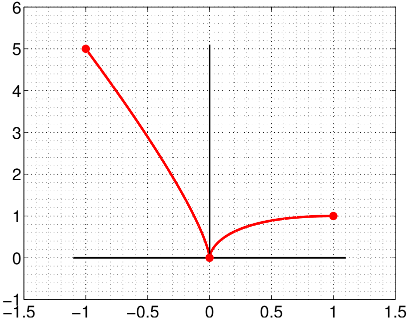


Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = 3x^{2/3} - 2x, \qquad x \in [-1, 1].$$

Finn absolutte minima og maxima til funksjonen

$$g(x) = 3x^{2/3} - 2x, \qquad x \in [-1, 1].$$



Teorem 7, del 1

Vi ser der $f'(x) = 0$ og der f' er ikke definert. Anta f er kontinuerlig og x_0 er ikke et endepunkt.

- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) > 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) < 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt maximum.

Teorem 7, del 1

Vi ser der $f'(x) = 0$ og der f' er ikke definert. Anta f er kontinuerlig og x_0 er ikke et endepunkt.

- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) > 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) < 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt maximum. (f avtar før x_0 og vokser etter x_0)
- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) < 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) > 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt minimum.

Teorem 7, del 1
Vi ser der $f'(x) = 0$ og der f' er ikke definert. Anta f er kontinuerlig og x_0 er ikke et endepunkt.

- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) > 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) < 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt maximum. (f avtar før x_0 og vokser etter x_0)
- Hvis det finnes (a, b) (åpen interval) og $x_0 \in (a, b)$ og $f'(x) < 0$ til venstre for x_0 og $f'(x) > 0$ til høyre for x_0 i (a, b) da er x_0 et lokalt minimum. (f avtar før x_0 og vokser etter x_0)

Teorem 7, del 2

Anta a er venstre endepunkt av domenet og f er høyrekontinuerlig i a.

- Hvis $f'(x) > 0$ på et intervall (a, b), da har f et lokalt minimum i a.
- Hvis $f'(x) < 0$ på et intervall (a, b), da har f et lokalt maximum i a.

Anta b er høyre endepunkt av domenet og f er venstrekontinuerlig i b.

- Hvis $f'(x) > 0$ på et intervall (a, b), da har f et lokalt maximum i a.
- Hvis $f'(x) < 0$ på et intervall (a, b), da har f et lokalt minimum i a.

Finn de lokale og absolutte minima og maksima av
$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

Eksempel 5

Finn de lokale og absolutte minima og maksima av $f(x) = x - x^{2/3}$

Merknad Det er ikke tilstrekkelig at $f'(x_0) = 0$ for at f har en ekstremalverdi i x_0.

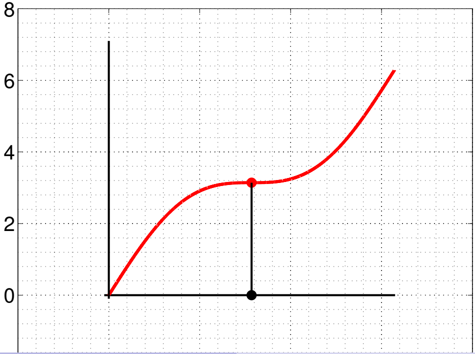
Example

Betrakt $f(x) = sin(x) + x$ som har deriverte $f'(x) = \cos(x) + 1$.

Merknad Det er ikke tilstrekkelig at $f'(x_0) = 0$ for at f har en ekstremalverdi i x_0.

Example

Betrakt $f(x) = sin(x) + x$ som har deriverte $f'(x) = \cos(x) + 1$. f' er null i π men f har verken et maximum eller et mimimum i $x = \pi$ (men et infleksjonspunkt).



La f være kontinuerlig i (a, b) åpen intervall og

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = M$$

da

- hvis $f(u) > L$ og $f(u) > M$ for noen $u \in (a, b)$ da f har et absolutt maximum i (a, b)
- hvis $f(v) < L$ og $f(v) < M$ for noen $v \in (a, b)$ da f har et absolutt minimum i (a, b)

a kan her erstattes med $-\infty$ og b kan erstattes med $+\infty$ og i tillegg kan L og M erstattes med både $+\infty$ og $-\infty$.

Example

Vis at $f(x) = x + (4/x)$ har et absolutt minimum på intervallet $(0, \infty)$, finn minimumsverdien.

Eksempel 5 En person kan løpe to ganger furtere enn hun kan svømme. Hun står i et punkt A ved siden av en sirkelformet svømmebaseng (med diameter av 40 meter). Hun vil komme så fort som mulig til punkt B som er diametralt motsatt i forhold til A. Planen er å løpe først rundt perimeteren av basenget til punkt C og så legge på svøm langs en rettlinje til B. Hvor skal C ligge for at den totale tiden fra A til B minimeres?