Anvendelser av integralet

Department of Mathematical Sciences, NTNU, Norway

October 27, 2014

- Volum av rotasjonslegemer
- Eksempler

Areal av en halv sirkel

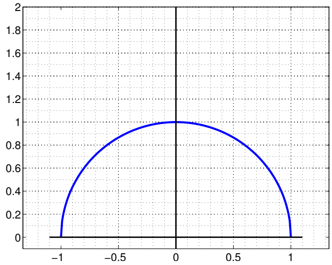

Figure : Arealen av en halv sirkel.

Vi bruker

$$f(x) = \sqrt{r - x^2}.$$

Arealen må være

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r - x^2}\, dx$$

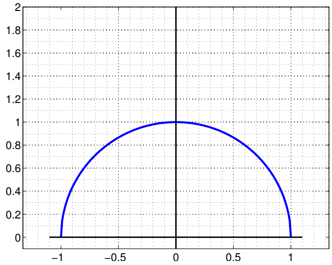

Figure : Arealen av en halv sirkel.

Vi bruker

$$f(x) = \sqrt{r - x^2}.$$

Arealen må være

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} r^2$$

Volum

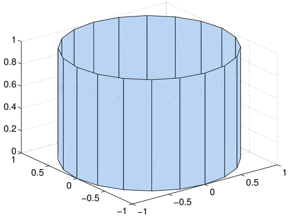

Figure : Volum av en sylinder: $hr^2\pi$.

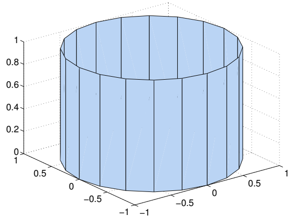

Figure : Volum av en sylinder: $hr^2\pi$.

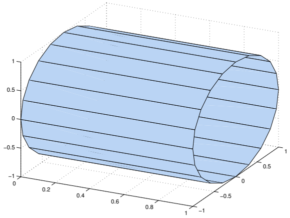

Figure : Høyden langs med x-asen, $hr^2\pi = r^2\pi \int_0^h dx$

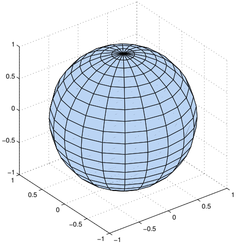

Figure : Volum av en kule: $\frac{4}{3}r^3\pi$.

Eksempel 1 Kap 7.1

Eksamensoppgave 5 Desember 2012 (oppgave 4 på konteksamen)

- Oppgave 4 Des 2010
- Oppgave 8 Aug 2010
- Oppgave 7 Des 2009
- Oppgave 3 Des 2008
- Oppgave 7 Aug 2007
- Oppgave 4 Des 2006
- Oppgave 2 Des 2004
- Oppgave 8 Des 2003
- Oppgave 1 Aug 2003
- Oppgave 4 Des 2002
- Oppgave 1 Des 2000
- Oppgave 2 Aug 2000
- Oppgave 9 Des 1999
- Oppgave 2 Des 1998
- Oppgave 5 Aug 1998

- $$V = \int_0^h A(x)dx$$
- Bevis at volumet av en pyramide med høyde h og basis areal A er $\frac{1}{3}Ah$
- eksempel 2 kap 7.2

- Buelengde
- Areal til an omdreiningflate
- Masse
- Tyngdepunkt

Buelengde

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

dvs overflate til et rotasjonslegemet

Eksempel 5 kap 7.3

Masse

$$M = \int \rho(P)dV$$

(der P er et vilkårlig punkt på legemet som vi vil finne massen av, og vi integrerer over volumet) vi ser på spesielle legemer som har tetthet som varierer bare i en retning i rommet.

Tyngdepunkt av en en-dimensjonal legemet (wire) er

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx}$$

Tyngdepunkt av en 2-dimensjonal plate $0 \le x \le b$, $0 \le y \le a$ med tetthet som avhenger bare av y ($\sigma(x,y) = ky$)

$$\bar{x} = \frac{a}{2}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_0^b ky^2 dy}{\int_0^b kaydx} = \frac{2b}{3}$$

Eksempel 5 og 6 kap 7.4

- Sentroider (Pappus teorem)
- Arbeid
- Kinetisk og Potensjal energi
- Anvendelser av integralet i Økonomi

Gitt området $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$, er sentroiden til området punktet med koordinater $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\, f(x) dx}{A}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_a^b f(x)^2 dx}{A}$$

og der

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Eksempel 1 sentroid til en halv disk.
Eksempel 2 sentroid til en halv sirkel (bare kurven til halvsirkelen, ikke arealen under).
Sentroiden til en trekant med hjørner (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) er

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

- Hvis vi skal finne volumet til en omdreiningslegemet generert av å rotere et plan området R om en rotasjonsaksen (si om y-aksen) kan vi gange arealen til R med avstanden som sentroiden til R dekker under rotasjonen:

$$V = A2\pi\bar{r}.$$

- Hvis vi skal finne arealen ti omdreiningsflate generert av å rotere et plan kurve $\mathcal{C}$ om en rotasjonsaksen (si om y-aksen) kan vi gange lengde til $\mathcal{C}$ med avstanden som sentroiden til $\mathcal{C}$ dekker under rotasjonen:

$$S = s2\pi\bar{r}$$

Eksempel 6 kap 7.5

kraft x avstand = arbeid

kraft x avstand = arbeid

Hvis kraft $F = F(x)$ er en funksjon av x da

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

Eksempel 3 kap 7.6
Eksempel 5 kap 7.6

Potensjal energi: arbeid gjennomført mot en kraft, og klar til bruk.

Potensjal energi: arbeid gjennomført mot en kraft, og klar til bruk.
Forandring av potensjal energi for et legeme med masse m som beveger seg langs x-aksen mellom a og b under en kraft $F(x)$ som avhenger bare av x er

$$U(b) - U(a) = -\int_a^b F(x)dx.$$

Potensjal energi: arbeid gjennomført mot en kraft, og klar til bruk.
Forandring av potensjal energi for et legeme med masse m som beveger seg langs x-aksen mellom a og b under en kraft $F(x)$ som avhenger bare av x er

$$U(b) - U(a) = -\int_a^b F(x)dx.$$

Potensjal energi kan konverteres i kinetisk energi som er energien av bevegelsen. Hvis et legemet beveger seg med hastiget v og har masse m da er den kinetiske energien

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Fra Newtons andre lov

$$F(x) = m\frac{dv}{dt}$$

og fra kjærneregel

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

så

$$F(x) = mv\frac{dv}{dx}$$

og da

$$U(b) - U(a) = -m\int_a^b v\frac{dv}{dx}dx = -m\int_{x=a}^{x=b} vdv = -\frac{1}{2}mv^2\Big|_{x=a}^{x=b} = K(a) - K(b)$$

så

$$K(b) + U(b) = K(a) + U(a)$$

total energien er konstant.

Eksempel 1 kap 7.7 En selger av kalkularorer tjener $15 - 5e^{-x/50}$ dollar per kalkulator, når vedkommende har solgt x kalkulatorer. Hvor mye tjener vedkommende for 100 kalkulatorer?

Eksempel 1 kap 7.7 En selger av kalkularorer tjener $15 - 5e^{-x/50}$ dollar per kalkulator, når vedkommende har solgt x kalkulatorer. Hvor mye tjener vedkommende for 100 kalkulatorer?

$$\int_0^{100} (15 - 5e^{-x/50})dx$$

Eksempel kap 7.7: Nåvarende verdi V av en forretning som genererer verdier med en rate $P(t)$ over T år

Eksempel 1 kap 7.7 En selger av kalkularorer tjener $15 - 5e^{-x/50}$ dollar per kalkulator, når vedkommende har solgt x kalkulatorer. Hvor mye tjener vedkommende for 100 kalkulatorer?

$$\int_0^{100} (15 - 5e^{-x/50}) dx$$

Eksempel kap 7.7: Nåvarende verdi V av en forretning som genererer verdier med en rate $P(t)$ over T år er

$$V = \int_0^T e^{-\delta t} P(t) dt$$