Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Midtsemesterprøve i TMA4100 Matematikk 1
Oktober 2013
Løsningsforslag til Versjon 7

Oppgave 07.1 Ligningen $x^4 + ye^{3y} = 1$ definerer implisitt en funksjon $y = f(x)$ med $f(1) = 0$. Finn $f'(1)$ og bestem Taylorpolynomet av annen grad om $x = 1$.

Løsning For å finne $f'(1)$ deriverer vi ligningen implisitt med hensyn på x:

$$
\begin{aligned}
&(ye^{3y})' + (x^4)' = (1)' \\
\implies &y'e^{3y} + 3y'ye^{3y} + 4x^3 = 0 \\
\implies &y' = \frac{-4x^3}{e^{3y}(1+3y)}.
\end{aligned}
$$

Innsetting av $x = 1$, $y(1) = 0$ gir $y'(1) = f'(1) = \frac{-4\cdot 1}{1\cdot(1+0)} = -4$.

For å finne Taylorpolynomet av annen grad, trenger vi $f''(1)$. Vi deriverer ligningen over implisitt med hensyn på x:

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{-12x^2e^{3y}(1+3y) - (-4x^3)(3y'e^{3y}(1+3y) + 3e^{3y}y')}{[e^{3y}(1+3y)]^2} \\
&= 12\frac{-x^2(1+3y) + x^3y'(2+3y)}{e^{3y}(1+3y)^2}.
\end{aligned}
$$

Innsetting av $x = 1$, $y(1) = 0$ og $y'(1) = -4$ gir $f''(1) = y''(1) = 12\frac{-1(1+0)+1\cdot(-4)(2+0)}{1(1+0)^2} = -108$.

Taylorpolynomet om $x = 1$ blir da

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 \\
&= -4(x-1) - 54(x-1)^2.
\end{aligned}
$$

Oppgave 07.2 Finn maksimum og minimum av

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

på intervallet $[0,4]$.

Løsning Funksjonen er kontinuerlig og deriverbar for alle x, så vi vet den antar ekstremalverdier enten der $f'(x) = 0$, eller i endepunktene av intervallet. Vi undersøker først $f'(x)$:

$$f'(x) = 2\frac{1+x^2 - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Vi har at $f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0$, slik at det eneste ekstremalpunktet er 1 (merk at -1 ikke er med i definisjonsmengden). Siden nevneren alltid er positiv, har vi at $f'(x) > 0$ når $-1 < x < 1$ og $f'(x) < 0$ for $x < -1$ og $x > 1$. Dette betyr at f har et lokalt maksimum i $x = 1$, og $f(1) = 1$. Vi har $f(4) = 8/17$, og siden $f(0) = 0$, konkluderer maksimumet til funksjonen er 1 og minimumet er 0.