**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



# Midtsemesterprøve i TMA4100 Matematikk 1
# Oktober 2013
# Løsningsforslag til Versjon 6

**Oppgave 06.1** Ligningen $x^2 - ye^y = 1$ definerer implisitt en funksjon $y = f(x)$ med $f(1) = 0$. Finn $f'(1)$ og bestem Taylorpolynomet av annen grad om $x = 1$.

**Løsning** For å finne $f'(1)$ deriverer vi ligningen implisitt med hensyn på $x$:

$$
\begin{aligned}
&(x^2)' - (y\mathrm{e}^y)' = (1)' \\
\Longrightarrow\ & y'\mathrm{e}^y + y'y\mathrm{e}^y - 2x = 0 \\
\Longrightarrow\ & y' = \frac{2x}{\mathrm{e}^y(1+y)}.
\end{aligned}
$$

Innsetting av $x = 1$, $y(1) = 0$ gir $y'(1) = f'(1) = \frac{2\cdot 1}{1\cdot(1+0)} = 2$.

For å finne Taylorpolynomet av annen grad, trenger vi $f''(1)$. Vi deriverer ligningen over implisitt med hensyn på $x$:

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{2\mathrm{e}^y(1+y) - 2xy'\mathrm{e}^y(1+y) + y'\mathrm{e}^y}{[\mathrm{e}^y(1+y)]^2} \\
&= \frac{2((1+y) - xy'(2+y))}{\mathrm{e}^y(1+y)^2}.
\end{aligned}
$$

Innsetting av $x = 1$, $y(1) = 0$ og $y'(1) = 2$ gir $f''(1) = y''(1) = \frac{2\cdot((1+0)-1\cdot 2\cdot(2+0))}{1(1+0)^2} = -6$. Taylorpolynomet om $x = 1$ blir da

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 \\
&= 2(x-1) - 3(x-1)^2.
\end{aligned}
$$

**Oppgave 06.2** Finn maksimum og minimum av

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

på intervallet $[0,1]$.

**Løsning** Funksjonen er kontinuerlig og deriverbar for alle $x$, så vi vet den antar ekstremalverdier enten der $f'(x) = 0$, eller i endepunktene av intervallet. Vi undersøker først $f'(x)$:

$$f'(x) = 2\frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Vi har at $f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0$, slik at det eneste ekstremalpunktet er 1 (merk at -1 ikke er med i definisjonsmengden). Siden nevneren alltid er positiv, har vi at $f'(x) > 0$ når $-1 < x < 1$ og $f'(x) < 0$ for $x < -1$ og $x > 1$. Dette betyr at $f$ har et lokalt maksimum i $x = 1$. Vi har $f(1) = 1$, og siden $f(0) = 0$, konkluderer maksimum til funksjonen er 1 og minimum er 0.