Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Midtsemesterprøve i TMA4100 Matematikk 1
Oktober 2013
Løsningsforslag til Versjon 4

Oppgave 04.1 Finn grensene $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(e^{1/x}-1)$ og $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{(\sin 2x)^2}$.

Løsning Da $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$ og $\lim_{x\to\infty}(e^{1/x}-1)=0$ er $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(e^{1/x}-1)$ ubestemt av typen "$\infty\cdot 0$". Vi forsøker derfor med L'Hôpitals regel:

Da $\frac{1}{\sqrt{x}}$ og $e^{1/x}-1$ begge er deriverbare, og

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(e^{1/x}-1)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}e^{1/x}}{\frac{-1}{2x^{3/2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{1/x}}{\sqrt{x}}=0$$

følger det av L'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(e^{1/x}-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(e^{1/x}-1)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x}}}=0.$$

Da $\lim_{x\to 0}\cos 2x-1=0$ og $\lim_{x\to 0}(\sin x)^2=0$ er $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{(\sin x)^2}$ ubestemt av typen "0/0". Vi forsøker derfor med L'Hôpitals regel:

Da $\cos 3x-1$ og $(\sin 2x)^2$ begge er deriverbare får vi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\cos 3x-1)}{\frac{d}{dx}(\sin 2x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\sin 3x}{4\sin 2x\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\sin 3x}{2\sin 4x}.$$

I den siste likheten har vi brukt identiteten $\sin 2t=2\sin t\cos t$ for $t=2x$. Da $\lim_{x\to 0}-3\sin 3x=0$ og $\lim_{x\to 0}2\sin 4x=0$ er $\lim_{x\to 0}\frac{-3\sin 3x}{2\sin 4x}$ ubestemt av typen "0/0". Vi forsøker derfor med L'Hôpitals regel igjen:

Da $-3\sin 3x$ og $2\sin 4x$ begge er deriverbare, får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(-3\sin 3x)}{\frac{d}{dx}2\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{-9\cos 3x}{8\cos 4x} = \frac{-9}{8}.$$

Dermed følger det av L'Hôpitals regel to ganger at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - 1}{(\sin 2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\cos 3x - 1)}{\frac{d}{dx}(\sin 2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(-3\sin 3x)}{\frac{d}{dx}2\sin 4x} = \frac{-9}{8}.$$

Oppgave 04.2 Begrunn at ligningen $2x + \sin x = 1$ har nøyaktig en løsning i intervallet $0 < x < 1$. Finn løsningen med 3 desimalers nøyaktighet ved å bruke Newtons metode med startverdi $x_0 = 0.5$.

Løsning Da funksjonen $f(x) = 2x + \sin x$ er kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ og $2x + \sin x\big|_{x=0} = 0 < 1$ og $2x + \sin x\big|_{x=1} = 3 + \sin 1 > 1$, følger det av skjæringssetningen at det finnes minst en $c \in (0, 1)$ slik at $2c + \sin c = 1$. Da $\frac{d}{dx}(2x + \sin x) = 2 + \cos x > 0$ for alle $x \in (0, 1)$, følger det at funksjonen $f(x) = 2x + \sin x$ er strengt voksende på intervallet $[0, 1]$, og det finnes derfor høyst en $c \in (0, 1)$ slik at $2c + \sin c = 1$. Dermed har vi begrunnet at ligningen $2x + \sin x = 1$ har nøyaktig en løsning i intervallet $0 < x < 1$.

Vi setter opp Newtons metode. La $g(x) = 2x + \sin x - 1$. Da skal vi finne et nullpunkt til g. Vi lar derfor

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n + \sin x_n - 1}{2 + \cos x_n} = \frac{x_n \cos x_n - \sin x_n + 1}{2 + \cos x_n}.$$

Med $x_0 = 0.5$ får vi $x_1 = 0.3333929511$, $x_2 = 0.3354178041$ og $x_3 = 0.3354180324$. Her har de fem første desimalene allerede stabilisert seg, og med 3 desimalers nøyaktighet er svaret $x = 0.335$.