Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Midtsemesterprøve i TMA4100 Matematikk 1
Oktober 2013
Løsningsforslag til Versjon 3

Oppgave 03.1 Finn grensene $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{2t}-1)$ og $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{(\sin 2x)^2}$.

Løsning Da $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}=\pm\infty$ og $\lim_{t\to 0}(e^{2t}-1)=0$ er $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{2t}-1)$ ubestemt av typen "$\pm\infty\cdot 0$". Vi forsøker derfor med L'Hôpitals regel:

Da t og $e^{2t}-1$ begge er deriverbare, og

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{d}{dt}(e^{2t}-1)}{\frac{d}{dt}t}=\lim_{t\to 0}\frac{2e^{2t}}{1}=\lim_{t\to 0}2e^{2t}=2$$

følger det av L'Hôpitals regel at

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{2t}-1)=\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{d}{dt}(e^{2t}-1)}{\frac{d}{dt}t}=2.$$

Da $\lim_{x\to 0}\cos x-1=0$ og $\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^2=0$ er $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{(\sin 2x)^2}$ ubestemt av typen "0/0". Vi forsøker derfor med L'Hôpitals regel:

Da $\cos x-1$ og $(\sin 2x)^2$ begge er deriverbare får vi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\cos x-1)}{\frac{d}{dx}(\sin 2x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{4\sin 2x\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{8\sin x\cos x\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{8\cos x\cos 2x}=\frac{-1}{8}.$$

I den andre likheten har vi brukt identiteten $\sin 2x=2\sin x\cos x$. Dermed følger det av L'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{(\sin 2x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\cos x-1)}{\frac{d}{dx}(\sin 2x)^2}=\frac{-1}{8}.$$

Oppgave 03.2 Begrunn at ligningen $3x + \sin x = 1$ har nøyaktig en løsning i intervallet $0 < x < 1$. Finn løsningen med 3 desimalers nøyaktighet ved å bruke Newtons metode med startverdi $x_0 = 0.5$.

Løsning Da funksjonen $f(x) = 3x + \sin x$ er kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ og $3x + \sin x\big|_{x=0} = 0 < 1$ og $3x + \sin x\big|_{x=1} = 3 + \sin 1 > 1$, følger det av skjæringssetningen at det finnes minst en $c \in (0, 1)$ slik at $3c + \sin c = 1$. Da $\frac{d}{dx}(3x + \sin x) = 3 + \cos x > 0$ for alle $x \in (0, 1)$, følger det at funksjonen $f(x) = 3x + \sin x$ er strengt voksende på intervallet $[0, 1]$, og det finnes derfor høyst en $c \in (0, 1)$ slik at $3c + \sin c = 1$. Dermed har vi begrunnet at ligningen $3x + \sin x = 1$ har nøyaktig en løsning i intervallet $0 < x < 1$.

Vi setter opp Newtons metode. La $g(x) = 3x + \sin x - 1$. Da skal vi finne et nullpunkt til g. Vi lar derfor

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{3x_n + \sin x_n - 1}{3 + \cos x_n} = \frac{x_n \cos x_n - \sin x_n + 1}{3 + \cos x_n}.$$

Med $x_0 = 0.5$ får vi $x_1 = 0.2474133631$, $x_2 = 0.2506537817$ og $x_3 = 0.2506541071$. Her har de fem første desimalene allerede stabilisert seg, og med 3 desimalers nøyaktighet er svaret $x = 0.251$.