Midtsemesterprøve i TMA4100 Matematikk 1
Oktober 2013
Løsningsforslag til Versjon 20

Oppgave 20.1 Avgjør om følgende grenser eksisterer. Finn grensen om den eksisterer.

$$(i)\ \lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{t^2} \qquad (ii)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$$

Løsning Da $\lim_{t\to 0}(\cos t - 1) = 0$ og $\lim_{t\to 0} t^2 = 0$ er $\lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{t^2}$ en ubestemt form av typen "0/0". Vi forsøker derfor med L'Hôpitals regel:

Da $\cos t - 1$ og t^2 begge er deriverbare, og

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{d}{dt}(\cos t - 1)}{\frac{d}{dt}t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{2t} = \frac{-1}{2}$$

(da $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$), følger det av L'Hôpitals regel at

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{d}{dt}(\cos t - 1)}{\frac{d}{dt}t^2} = \frac{-1}{2}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Oppgave 20.2 En kurve C i (x, y)-planet har ligning

$$(*) \qquad 2e^{2x} - x^2 y = 4e^y$$

Vis at punktet $(0, -\ln 2)$ ligger på C, og finn ligningen for tangenten til C i dette punktet. Finn Taylorpolynomet av grad 2, $P_2(x)$, om $x = 0$ for funksjonen $y = f(x)$ som er definert implisitt ved ligningen $(*)$.

Løsning Da $(2e^{2x} - x^2 y)|_{x=0,y=-\ln 2} = 2e^{2\cdot 0} - 0^2 \cdot (-\ln 2) = 2$ og $(4e^y)|_{x=0,y=-\ln 2} = 4e^{-\ln 2} = 4\frac{1}{e^{\ln 2}} = 4\frac{1}{2} = 2$, ligger punktet $(0, -\ln 2)$ ligger på C.

Ved implisitt derivasjon av $(*)$ får vi at $4^{2x} - 2xy - x^2 \frac{dy}{dx} = 4e^y \frac{dy}{dx}$ og dermed at $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x} - 2xy}{4e^y + x^2}$. Det følger at $\frac{dy}{dx}|_{x=0,y=-\ln 2} = \frac{4e^{2x} - 2xy}{4e^y + x^2}|_{x=0,y=-\ln 2} = \frac{4e^{2\cdot 0} - 2\cdot 0\cdot(-\ln 2)}{4e^{-\ln 2} + 0^2} = \frac{4}{2} = 2$ og dermed at tangenten til C i punktet $(0, -\ln 2)$ har ligning $y = 2x - \ln 2$.

Videre har vi at

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\frac{4e^{2x} - 2xy}{4e^y + x^2} = \frac{(4e^y + x^2)(8e^{2x} - 2y - 2x\frac{dy}{dx}) - (4e^y \frac{dy}{dx} + 2x)(4e^{2x} - 2xy)}{(4e^y + x^2)^2},$$

og da $\frac{dy}{dx}|_{x=0,y=-\ln 2} = 2$, følger det at

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0,y=-\ln 2} &= \frac{(4e^{-\ln 2} + 0^2)(8e^{2\cdot 0} - 2(-\ln 2) - 2\cdot 0\cdot 2) - (4e^{-\ln 2}\cdot 2 + 2\cdot 0)(4e^{2\cdot 0} - 2\cdot 0\cdot(-\ln 2))}{(4e^{-\ln 2} + 0^2)^2} \\
&= \frac{2(8 + 2\ln 2) - 4\cdot 4}{2^2} = \ln 2.
\end{aligned}$$

Vi har dermed at $f(0) = -\ln 2$, $f'(0) = 2$ og $f''(0) = \ln 2$, så

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = -\ln 2 + 2x + \frac{\ln 2}{2}x^2.$$