Midtsemesterprøve i TMA4100 Matematikk 1
Oktober 2013
Løsningsforslag til Versjon 2

Oppgave 02.1 Finn grensene $\lim_{x\to\infty} x(e^{3/x}-1)$ og $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{(\sin x)^2}$.

Løsning Da $\lim_{x\to\infty} x = \infty$ og $\lim_{x\to\infty}(e^{3/x}-1) = 0$ er $\lim_{x\to\infty} x(e^{3/x}-1)$ ubestemt av typen "$\infty \cdot 0$". Vi forsøker derfor med L'Hôpitals regel:

Da x og $e^{3/x}-1$ begge er deriverbare, og

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^{3/x}-1)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-3}{x^2}e^{3/x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} 3e^{3/x} = 3$$

følger det av L'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{3/x}-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{3/x}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^{3/x}-1)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{x}} = 3.$$

Da $\lim_{x\to 0} \cos 2x - 1 = 0$ og $\lim_{x\to 0}(\sin x)^2 = 0$ er $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x-1}{(\sin x)^2}$ ubestemt av typen "0/0". Vi forsøker derfor med L'Hôpitals regel:

Da $\cos 2x - 1$ og $(\sin x)^2$ begge er deriverbare får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\cos 2x - 1)}{\frac{d}{dx}(\sin x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 2x}{2\sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 2x}{\sin 2x} = -2.$$

I den nest siste likheten har vi brukt identiteten $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Dermed følger det av L'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{(\sin x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\cos 2x - 1)}{\frac{d}{dx}(\sin x)^2} = -2.$$

Oppgave 02.2 Begrunn at ligningen $x + 3\sin x = 1$ har nøyaktig en løsning i intervallet $0 < x < 1$. Finn løsningen med 3 desimalers nøyaktighet ved å bruke Newtons metode med startverdi $x_0 = 0.5$.

Løsning Da funksjonen $f(x) = x+3\sin x$ er kontinuerlig på intervallet $[0,1]$ og $x+3\sin x\big|_{x=0} = 0 < 1$ og $x+3\sin x\big|_{x=1} = 1+3\sin 1 > 1$, følger det av skjæringssetningen at det finnes minst en $c \in (0,1)$ slik at $c+3\sin c = 1$. Da $\frac{d}{dx}(x+3\sin x) = 1+3\cos x > 0$ for alle $x \in (0,1)$, følger det at funksjonen $f(x) = x + 3\sin x$ er strengt voksende på intervallet $[0,1]$, og det finnes derfor høyst en $c \in (0,1)$ slik at $c + 2\sin c = 1$. Dermed har vi begrunnet at ligningen $x + 3\sin x = 1$ har nøyaktig en løsning i intervallet $0 < x < 1$.

Vi setter opp Newtons metode. La $g(x) = x + 3\sin x - 1$. Da skal vi finne et nullpunkt til g. Vi lar derfor

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n + 3\sin x_n - 1}{1 + 3\cos x_n} = \frac{3x_n\cos x_n - 3\sin x_n + 1}{1 + 3\cos x_n}.$$

Med $x_0 = 0.5$ får vi $x_1 = 0.2417170976$, $x_2 = 0.2519840632$ og $x_3 = 0.2519938892$. Her har de fire første desimalene allerede stabilisert seg, og med 3 desimalers nøyaktighet er svaret $x = 0.252$.