Midtsemesterprøve i TMA4100 Matematikk 1
Oktober 2013
Løsningsforslag til Versjon 19

Oppgave 19.1 Avgjør om følgende grenser eksisterer. Finn grensen om den eksisterer.

$$(i)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-1}{x} \qquad (ii)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x+x^2}-x)$$

Løsning Da $\lim_{x\to 0}(\cos(3x)-1)=0$ og $\lim_{x\to 0} x = 0$ er $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-1}{x}$ en ubestemt form av typen "0/0". Vi forsøker derfor med L'Hôpitals regel:

Da $\cos(3x)-1$ og x begge er deriverbare, og

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\cos(3x)-1)}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to 0}\frac{-3\sin(3x)}{1} = -3\sin(0) = 0,$$

følger det av L'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\cos(3x)-1)}{\frac{d}{dx}x} = 0.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x+x^2}-x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x+x^2}-x)(\sqrt{2x+x^2}+x)}{\sqrt{2x+x^2}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+x^2-x^2}{\sqrt{2x+x^2}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{2x+x^2}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2/x+1}+1} = \frac{2}{2} = 1.\end{aligned}$$

Oppgave 19.2 En kurve C i (x, y)-planet har ligning

$$(*) \qquad 2e^{2x} = 2x^2y + e^y$$

Vis at punktet $(0, \ln 2)$ ligger på C, og finn ligningen for tangenten til C i dette punktet. Finn Taylorpolynomet av grad 2, $P_2(x)$, om $x = 0$ for funksjonen $y = f(x)$ som er definert implisitt ved ligningen $(*)$.

Løsning Da $2e^{2x}|_{x=0,y=\ln 2} = 2e^{2\cdot 0} = 2$ og $(2x^2y + e^y)|_{x=0,y=\ln 2} = 2 \cdot 0^2 \cdot \ln 2 + e^{\ln 2} = 2$, ligger punktet $(0, \ln 2)$ ligger på C.

Ved implisitt derivasjon av $(*)$ får vi at $4e^{2x} = 4xy + 2x^2 \frac{dy}{dx} + e^y \frac{dy}{dx}$ og dermed at $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x}-4xy}{e^y+2x^2}$. Det følger at $\frac{dy}{dx}|_{x=0,y=\ln 2} = \frac{4e^{2x}-4xy}{e^y+2x^2}|_{x=0,y=\ln 2} = \frac{4e^{2\cdot 0}-4\cdot 0\cdot \ln 2}{e^{\ln 2}+2\cdot 0^2} = \frac{4}{2} = 2$ og dermed at tangenten til C i punktet $(0, \ln 2)$ har ligning $y = 2x + \ln 2$.

Videre har vi at

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\frac{4e^{2x} - 4xy}{e^y + 2x^2} = \frac{(e^y + 2x^2)(8e^{2x} - 4y - 4x\frac{dy}{dx}) - (e^y\frac{dy}{dx} + 4x)(4e^{2x} - 4xy)}{(e^y + 2x^2)^2},$$

og da $\frac{dy}{dx}|_{x=0,y=\ln 2} = 2$, følger det at

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0,y=\ln 2} &= \frac{(e^{\ln 2} + 2\cdot 0^2)(8e^{2\cdot 0} - 4\cdot \ln 2 - 4\cdot 0\cdot 2) - (e^{\ln 2}\cdot 2 + 4\cdot 0)(4e^{2\cdot 0} - 4\cdot 0\cdot \ln 2)}{(e^{\ln 2} + 2\cdot 0^2)^2} \\ &= \frac{2(8 - 4\ln 2) - 4\cdot 4}{2^2} = -2\ln 2.\end{aligned}$$

Vi har dermed at $f(0) = \ln 2$, $f'(0) = 2$ og $f''(0) = -2\ln 2$, så

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \ln 2 + 2x - (\ln 2)x^2.$$