Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Midtsemesterprøve i TMA4100 Matematikk 1
Oktober 2013
Løsningsforslag til Versjon 18

Oppgave 18.1 Avgjør om følgende grenser eksisterer. Finn grensen om den eksisterer.

$$(i)\ \lim_{u\to\infty} 2u(\cos\frac{1}{u}-1) \qquad (ii)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$$

Løsning Da $\lim_{u\to\infty}(\cos\frac{1}{u}-1)=0$ og $\lim_{u\to\infty}2u=\infty$ er $\lim_{u\to\infty}2u(\cos\frac{1}{u}-1)$ en ubestemt form av typen "$0\cdot\infty$". Vi forsøker derfor med L'Hôpitals regel:

Da $\cos\frac{1}{u}-1$ og $\frac{1}{2u}$ begge er deriverbare, og

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\frac{d}{du}(\cos\frac{1}{u}-1)}{\frac{d}{du}\frac{1}{2u}}=\lim_{u\to\infty}\frac{\frac{\sin\frac{1}{u}}{u^2}}{\frac{-1}{2u^2}}=\lim_{u\to\infty}-2\sin\frac{1}{u}=-2\sin 0=0,$$

følger det av L'Hôpitals regel at

$$\lim_{u\to\infty}2u(\cos\frac{1}{u}-1)=\lim_{u\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{u}-1}{\frac{1}{2u}}=\lim_{u\to\infty}\frac{\frac{d}{du}(\cos\frac{1}{u}-1)}{\frac{d}{du}\frac{1}{2u}}=0.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)&=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+1/x}+2}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Oppgave 18.2 En kurve C i (x, y)-planet har ligning

$$(*) \qquad 2e^{2x} - x^2y - e^y = 0$$

Vis at punktet $(0, \ln 2)$ ligger på C, og finn ligningen for tangenten til C i dette punktet. Finn Taylorpolynomet av grad 2, $P_2(x)$, om $x = 0$ for funksjonen $y = f(x)$ som er definert implisitt ved ligningen $(*)$.

Løsning Da $(2e^{2x} - x^2y - e^y)|_{x=0,y=\ln 2} = 2e^{2\cdot 0} - 0^2 \cdot \ln 2 - e^{\ln 2} = 2 - 2 = 0$, ligger punktet $(0, \ln 2)$ ligger på C.

Ved implisitt derivasjon av $(*)$ får vi at $4e^{2x} - 2xy - x^2\frac{dy}{dx} - e^y\frac{dy}{dx} = 0$ og dermed at $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x}-2xy}{e^y+x^2}$. Det følger at $\frac{dy}{dx}|_{x=0,y=\ln 2} = \frac{4e^{2x}-2xy}{e^y+x^2}|_{x=0,y=\ln 2} = \frac{4e^{2\cdot 0}-2\cdot 0\cdot \ln 2}{e^{\ln 2}+0^2} = \frac{4}{2} = 2$ og dermed at tangenten til C i punktet $(0, \ln 2)$ har ligning $y = 2x + \ln 2$.

Videre har vi at

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\frac{4e^{2x} - 2xy}{e^y + x^2} = \frac{(e^y + x^2)(8e^{2x} - 2y - 2x\frac{dy}{dx}) - (e^y\frac{dy}{dx} + 2x)(4e^{2x} - 2xy)}{(e^y + x^2)^2},$$

og da $\frac{dy}{dx}|_{x=0,y=\ln 2} = 2$, følger det at

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0,y=\ln 2} &= \frac{(e^{\ln 2} + 0^2)(8e^{2\cdot 0} - 2\cdot \ln 2 - 2\cdot 0\cdot 2) - (e^{\ln 2}\cdot 2 + 2\cdot 0)(4e^{2\cdot 0} - 2\cdot 0\cdot \ln 2)}{(e^{\ln 2} + 0^2)^2} \\ &= \frac{2(8 - 2\ln 2) - 4\cdot 4}{2^2} = -\ln 2.\end{aligned}$$

Vi har dermed at $f(0) = \ln 2$, $f'(0) = 2$ og $f''(0) = -\ln 2$, så

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \ln 2 + 2x - \frac{\ln 2}{2}x^2.$$