Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Instituttt for matematiske fag

Midtsemesterprøve i TMA4100 Matematikk 1
Oktober 2013
Løsningsforslag til Versjon 16

Oppgave 16.1 Vis at likningen $\cos(x) - 4x = 0$ har nøyaktig en løsning. Finn denne med 3 desimalers nøyaktighet ved bruk av Newtons metode.

Løsning La $f(x) = \cos(x) - 4x$. Vi skal vise at $f(x) = 0$ har nøyaktig en løsning. Da funksjonen $f(x) = \cos(x) - 4x$ er kontinuerlig på den reelle linjen og

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$$

finnes det minst en $x \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = 0$ (skjæringssetningen). Da $f'(x) = -\sin(x) - 4$ og $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, følger det at $f'(x) \leq -3$ og at funksjonen $f(x)$ er strengt avtagende på den reelle linjen. Dermed er $f(x)$ en en-entydig funksjon, og spesielt finnes det nøyaktig en løsning $x \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = 0$. I tillegg, da $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, er

$$-1 - 4x \leq f(x) = \cos(x) - 4x \leq 1 - 4x.$$

Da $f(0) = 1$ og $f(1) \leq -3$, ligger nullpunktet til $f(x)$ i intervallet $[0, 1]$.

Sett opp Newtons metode, det vil si

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + \frac{\cos(x_n) - 4x_n}{\sin(x_n) + 4}$$

og velg $x_0 = 0.5$, siden nullpunktet til $f(x)$ ligger i intervallet $[0, 1]$. Da blir

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.5 \\ x_1 &= 0.2494282630 \\ x_2 &= 0.2426798874 \\ x_3 &= 0.2426746806. \end{aligned}$$

Her har de fem første desimalene allerede stabilisert seg, og med 3 desimalers nøyaktighet er svaret $x = 0.243$.

Oppgave 16.2 Ligningen

$$x^6y + 2xy^3 = 3$$

definerer implisitt en funksjon $y = f(x)$ med $f(1) = 1$. Finn Taylor-polynomet til f av grad 2 om $x = 1$.

Løsning Taylor-polynomet til f av grad 2 om $x = 1$ er polynomet

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2.$$

Derfor må vi finne $f(1)$, $f'(1)$ og $f''(1)$. Vi vet at $f(1) = 1$. Deriverer vi den gitte ligningen implisitt med hensyn på x får vi

$$6x^5y + 2y^3 + (x^6 + 6xy^2)y' = 0. \tag{1}$$

Setter vi så inn $x = 1$ og $y = f(1) = 1$ her, får vi $8 + 7y' = 0$, slik at $f'(1) = -\frac{8}{7}$. Deriverer vi (1) med hensyn på x, får vi

$$30x^4y + 6x^5y' + 6y^2y' + (6x^5 + 6y^2 + 12xyy')y' + (x^6 + 6xy^2)y'' = 0.$$

Her setter vi inn $x = 1$, $y = f(1) = 1$ og $y' = f'(1) = -\frac{8}{7}$. Dette gir $894 + 343y'' = 0$, som gir $f''(1) = -\frac{894}{343}$. Taylor-polynomet av annen grad om $x = 1$ er derfor

$$P_2(x) = 1 - \frac{8}{7}(x-1) - \frac{447}{343}(x-1)^2.$$