



Midtsemesterprøve i TMA4100 Matematikk 1  
Oktober 2013  
Løsningsforslag til Versjon 15

**Oppgave 15.1** Vis at likningen  $4x = \cos(x)$  har nøyaktig en løsning. Finn denne med 3 desimalers nøyaktighet ved bruk av Newtons metode.

**Løsning** La  $f(x) = \cos(x) - 4x$ . Vi skal vise at  $f(x) = 0$  har nøyaktig en løsning. Da funksjonen  $f(x) = \cos(x) - 4x$  er kontinuerlig på den reelle linjen og

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty,$$

finnes det minst en  $x \in \mathbb{R}$  slik at  $f(x) = 0$  (skjæringssetningen). Da  $f'(x) = -\sin(x) - 4$  og  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ , følger det at  $f'(x) \leq -3$  og at funksjonen  $f(x)$  er strengt avtagende på den reelle linjen. Dermed er  $f(x)$  en en-entydig funksjon, og spesielt finnes det nøyaktig en løsning  $x \in \mathbb{R}$  slik at  $f(x) = 0$ . I tillegg, da  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ , er

$$-1 - 4x \leq f(x) = \cos(x) - 4x \leq 1 - 4x.$$

Da  $f(0) = 1$  og  $f(1) \leq -3$ , ligger nullpunktet til  $f(x)$  i intervallet  $[0, 1]$ .

Sett opp Newtons metode, det vil si

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + \frac{\cos(x_n) - 4x_n}{\sin(x_n) + 4}$$

og velg  $x_0 = 0.5$ , siden nullpunktet til  $f(x)$  ligger i intervallet  $[0, 1]$ . Da blir

$$\begin{aligned}x_0 &= 0.5 \\x_1 &= 0.2494282630 \\x_2 &= 0.2426798874 \\x_3 &= 0.2426746806.\end{aligned}$$

Her har de fem første desimalene allerede stabilisert seg, og med 3 desimalers nøyaktighet er svaret  $x = 0.243$ .

**Oppgave 15.2** Ligningen

$$x^5y + xy^3 = 2$$

definerer implisitt en funksjon  $y = f(x)$  med  $f(1) = 1$ . Finn Taylor-polynomet til  $f$  av grad 2 om  $x = 1$ .

**Løsning** Taylor-polynomet til  $f$  av grad 2 om  $x = 1$  er polynomet

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2.$$

Derfor må vi finne  $f(1)$ ,  $f'(1)$  og  $f''(1)$ . Vi vet at  $f(1) = 1$ . Deriverer vi den gitte ligningen implisitt med hensyn på  $x$  får vi

$$5x^4y + y^3 + (x^5 + 3xy^2)y' = 0. \quad (1)$$

Setter vi så inn  $x = 1$  og  $y = f(1) = 1$  her, får vi  $6 + 4y' = 0$ , slik at  $f'(1) = -\frac{3}{2}$ . Deriverer vi (1) med hensyn på  $x$ , får vi

$$20x^3y + 5x^4y' + 3y^2y' + (5x^4 + 3y^2 + 6xyy')y' + (x^5 + 3xy^2)y'' = 0.$$

Her setter vi inn  $x = 1$ ,  $y = f(1) = 1$  og  $y' = f'(1) = -\frac{3}{2}$ . Dette gir  $19 + 8y'' = 0$ , som gir  $f''(1) = -\frac{19}{8}$ . Taylor-polynomet av annen grad om  $x = 1$  er derfor

$$P_2(x) = 1 - \frac{3}{2}(x-1) - \frac{19}{16}(x-1)^2.$$